Übungen 7 & 8 zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in diesen Übungen:

14.1 Funktionen von zwei Variablen

- Aufgabe 14.1.4 von Seite 650
- Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

- Aufgabe 14.2.4 von Seite 656
- Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

14.3 Geometrische Darstellung

- Aufgabe 14.3.5 von Seite 664
- Aufgabe zu Höhenlinien

14.4 Flächen

- Aufgabe 14.4.2 von Seite 667

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

- Aufgabe 14.8.2 von Seite 694
- Aufgabe zu perfekten Substituten
- Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

a) Bestimme $f(-1, 2)$, $f(a, a)$ und $f(a + h, b) - f(a, b)$.

b) Zeige, dass $f(2x, 2y) = 2^2 f(x, y)$ und
dass $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$ für alle t.

Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

Untersuche die Definitionsbereiche der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen und zeichne diese dann in der xy-Ebene.

a) $\frac{x^2+y^3}{y-x+2}$

b) $\sqrt{2-(x^2+y^2)}$

c) $\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von:

a) $z = 3x + 4y$

b) $z = x^3 y^2$

c) $z = x^5 - 3x^2 y + y^6$

Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für jede der folgenden Funktionen:

a) $z = x^2 + e^{2y}$

b) $z = y \ln(x)$

c) $z = xy^2 - e^{xy}$

d) $z = x^y$

Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

Zeichne für die folgenden Funktionen eine Reihe von Höhenlinien in ein x-y-Diagramm:

- $z = 3 - x - y$
- $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

Aufgabe zu Höhenlinien

Es seien die Nutzenfunktionen u und v durch

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

und

$$v(x, y) = \ln(x) + 2\ln(y)$$

gegeben, wobei $x, y > 0$.

Begründe, warum diese beiden Funktionen das gleiche System von Höhenlinien haben: Wenn zwei Paare (x_0, y_0) und (x_1, y_1) auf der gleichen Höhenlinie von u liegen, dann müssen sie auch auf der gleichen Höhenlinie von v liegen (und umgekehrt).

Aufgabe 14.4.2 von Seite 667

Bestimme die Abstände zwischen den folgenden Paaren von Punkten:

a) $(-1, 2, 3)$ und $(4, -2, 0)$
b) (a, b, c) und $(a + 1, b + 1, c + 1)$

Aufgabe 14.4.3 von Seite 667

Gebe die Gleichung einer Kugel mit Mittelpunkt $(2, 1, 1)$ und Radius 5 an.

Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Für welche Werte der Konstante a ist die folgende Funktion konkav / konvex?

$$f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$$

Aufgabe zu perfekten Substituten

Ein Nutzenfunktion für perfekte Substitute laute

$$u(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$$

mit $a, b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Eine quasilineare Nutzenfunktion laute

$$u(x, y) = v(x) + b \cdot y$$

mit $v' > 0, v'' < 0$ und $b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?