Vorlesung zu Kapitel 14:[1]

Funktionen mehrerer Variablen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

14.3 Geometrische Darstellung

14.4 Flächen

14.5 Funktionen von n Variablen

14.6 Partielle Ableitungen bei mehreren Variablen

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

14.9 Ökonomische Anwendung: Produktionsfunktion

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Definitionsbereich

Teilmenge von

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

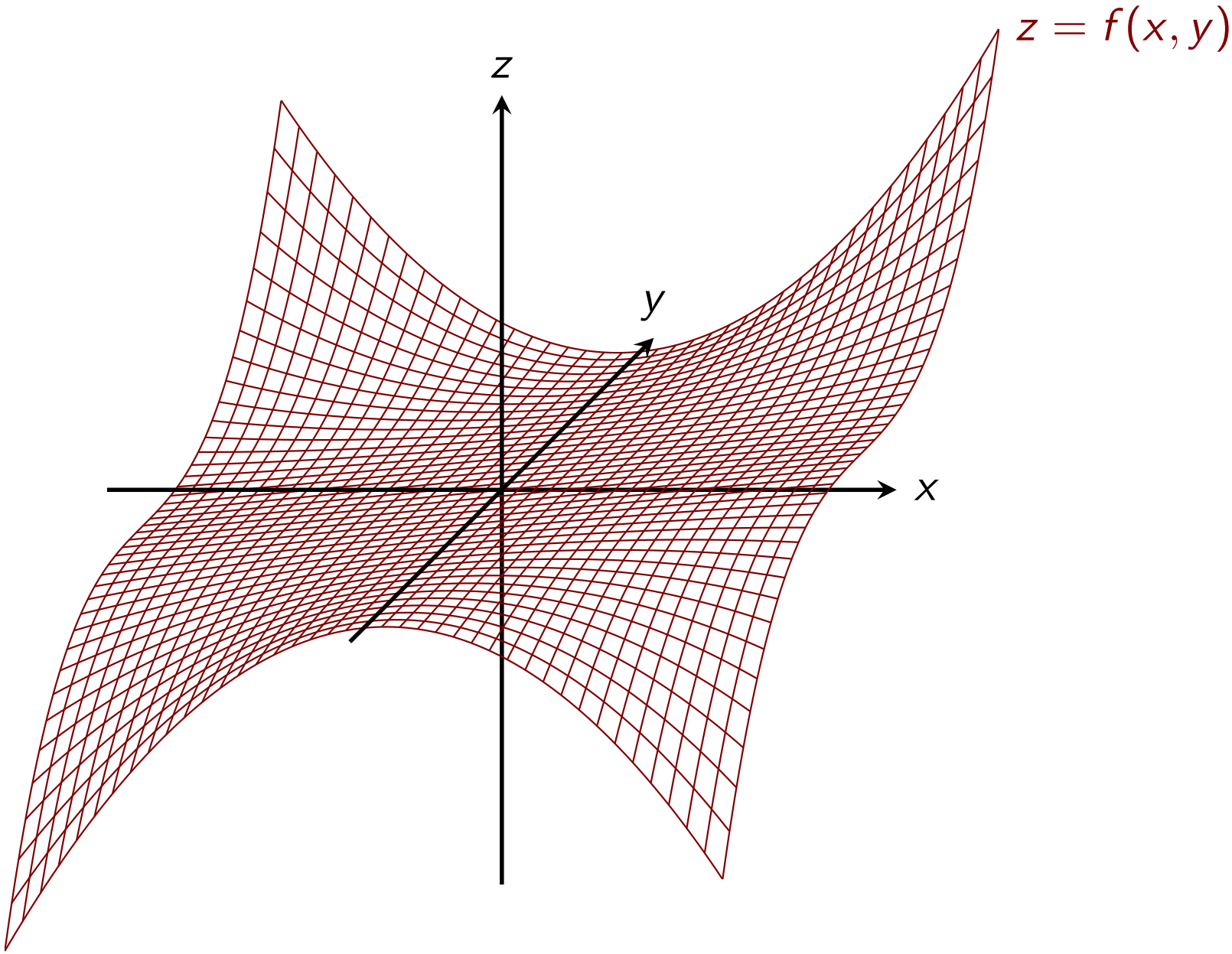
Eine reellwertige Funktion f von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D ist eine Regel, die eine genau spezifizierte reelle Zahl

Element von

$$f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ zu jedem Punkt } (x, y) \in D$$

festlegt.

Beispiel: $f(x,y) = 2x + x^2y^3$ $\quad D = \mathbb{R}^2$



$f(x,y) = 2x + x^2y^3$

$f(a,b) = 2a + a^2b^3$

Gebe die Werte von f für folgende Zahlenpaare an:

a) $(x,y) = (\overset{x}{1}, \overset{y}{0})$ $\quad f(1,0) = 2\cdot 1 + 1^2\cdot 0^3 = 2$

b) $(x,y) = (\overset{x}{0}, \overset{y}{1})$ $\quad f(0,1) = 2\cdot 0 + 0^2\cdot 1^3 = 0$

c) $(x,y) = (\overset{x}{-2}, \overset{y}{3})$ $\quad f(-2,3) = 2\cdot(-2) + (-2)^2\cdot 3^3$

$= -4 + 4\cdot 27 = 26\cdot 4 = 104$

d) $(x,y) = (\overset{x}{\widetilde{a+1}}, \overset{y}{b})$

$f(a+1,b) = 2\cdot(a+1) + (a+1)^2b^3$

$= 2\cdot a + 2 + (a^2+2a+1)b^3$

$= \underbrace{2\cdot a + a^2b^3}_{f(a,b)} + 2 + (2a+1)b^3$

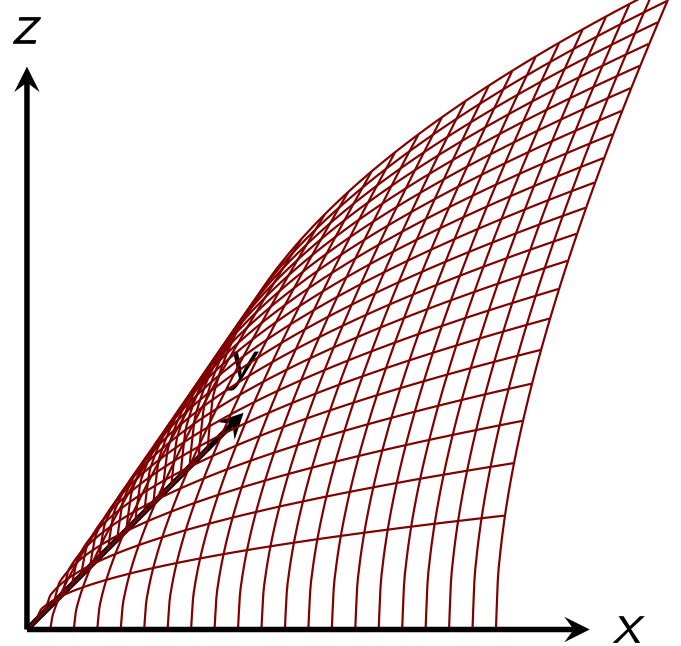
$f(a+1,b) - f(a,b) = 2 + (2a+1)b^3$

Beispiel: Cobb-Douglas-Funktion

→ Produktionsfunktion
→ Nutzenfunktion

$$f(x,y) = x^c y^d \qquad D = \mathbb{R}^2_{\geq}$$

mit $c, d > 0$.



$z = f(x,y)$

$c = d = \frac{1}{2}$

$f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

$= \sqrt{x \cdot y}$

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Univariate Funktion

$\frac{df}{dx}$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Falls $z = f(x, y)$, dann ist

- $\frac{\partial z}{\partial x}$ („Kringel", „Del") die Ableitung von $f(x, y)$ nach x, wenn y konstant gehalten wird.
- $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y, wenn x konstant gehalten wird.

delta δ Delta Δ

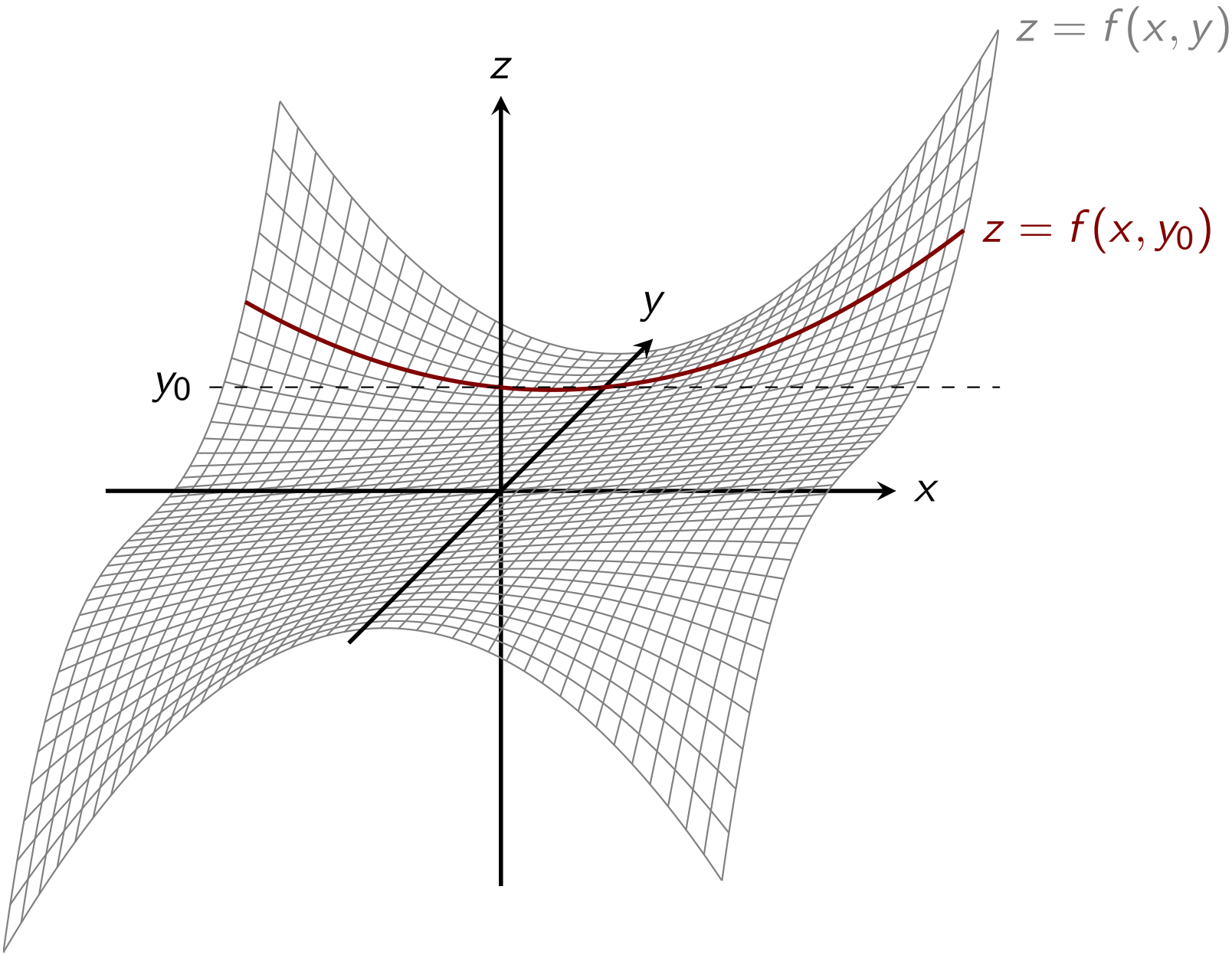
Definition:

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1'(x, y) := \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y)-f(x,y)}{dx}$ ($= f_x'$)
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2'(x, y) := \lim_{dy \to 0} \frac{f(x,y+dy)-f(x,y)}{dy}$ ($= f_y'$)

Ableitung nach der 1. Variablen

Ableitung nach der 2. Variablen

Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2y^3$

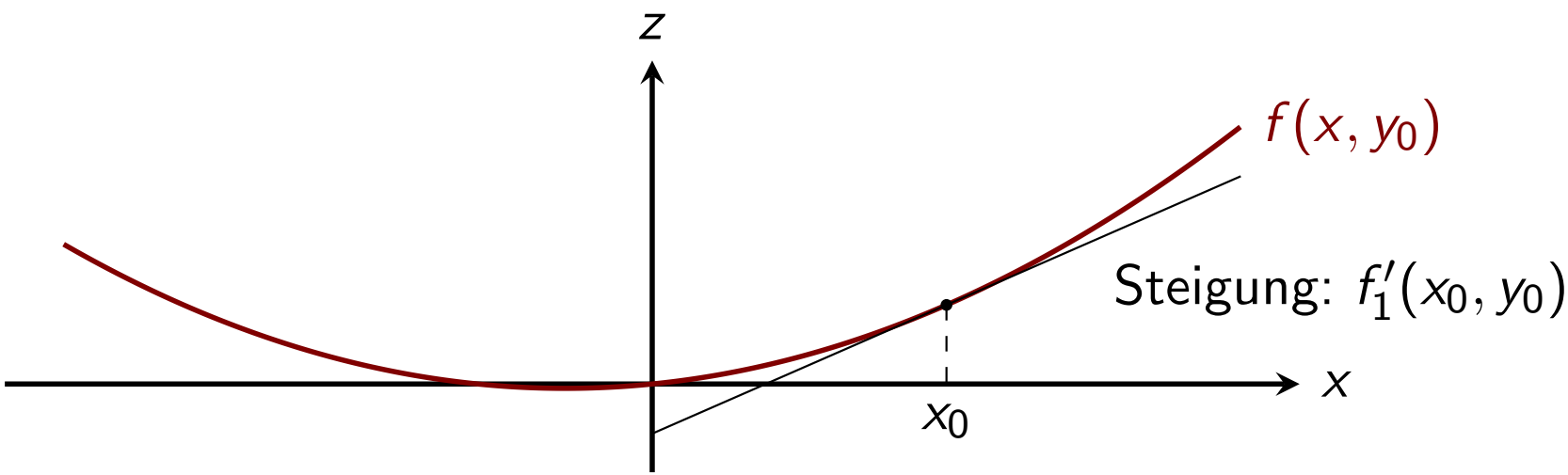


Partielle Ableitung nach x

multiplikative Konstante

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

Betrachte die Variable y als Konstante: $y = y_0$

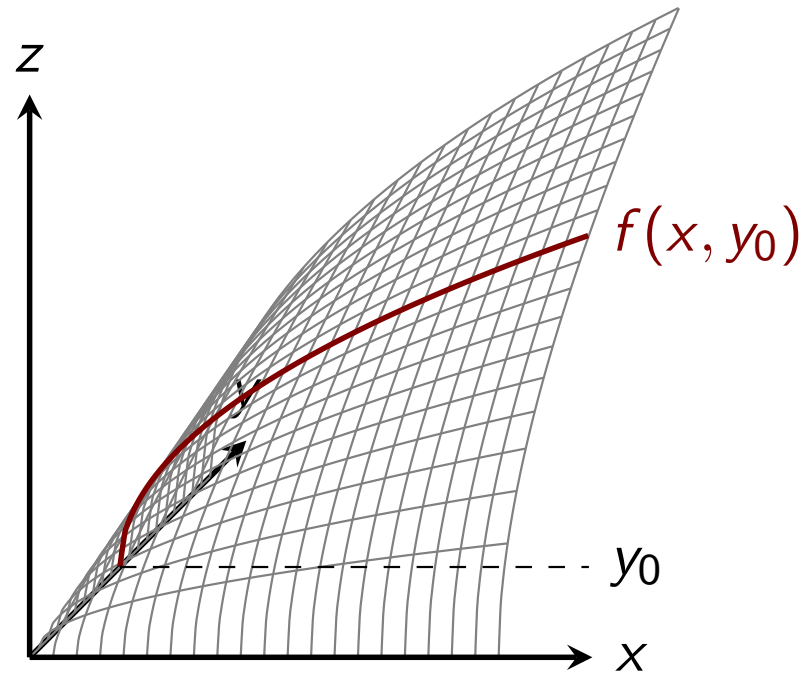


multiplikative Konstante

$$f_1'(x, y_0) = 2 + 2x y_0^3$$

Cobb-Douglas-Funktion $f(x, y) = x^c y^d$

mit $c, d > 0$.



Cobb-Douglas-Funktion

$$\frac{(x+dx)^c \cdot y^d - x^c \cdot y^d}{dx}$$

multiplikative Konstante

multiplikative Konstante

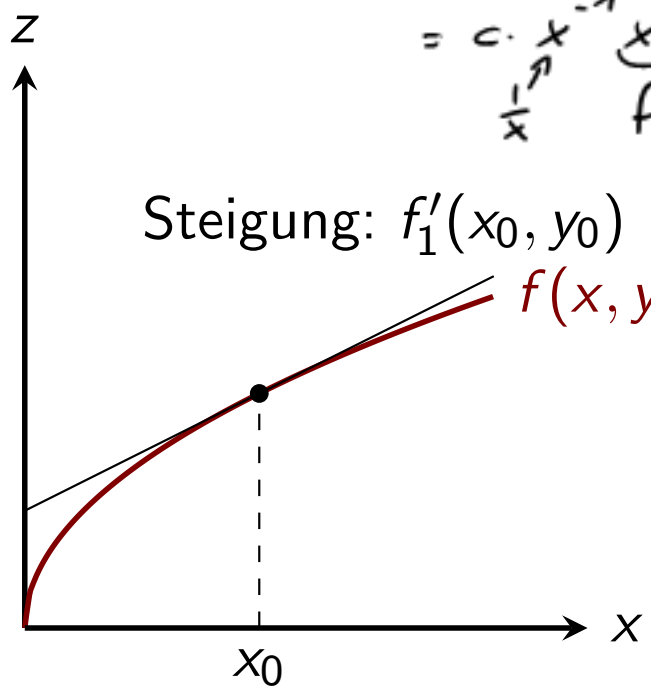
$$f(x,y) = x^c y^d$$

mit $c, d > 0$.

$$f_1'(x,y) = c \cdot x^{c-1} y^d = c \cdot x^c \cdot x^{-1} \cdot y^d$$

$$= c \cdot x^{-1} \underbrace{x^c \cdot y^d}_{f(x,y)} = c \cdot \frac{1}{x} \cdot f(x,y)$$

($\frac{1}{x}$)



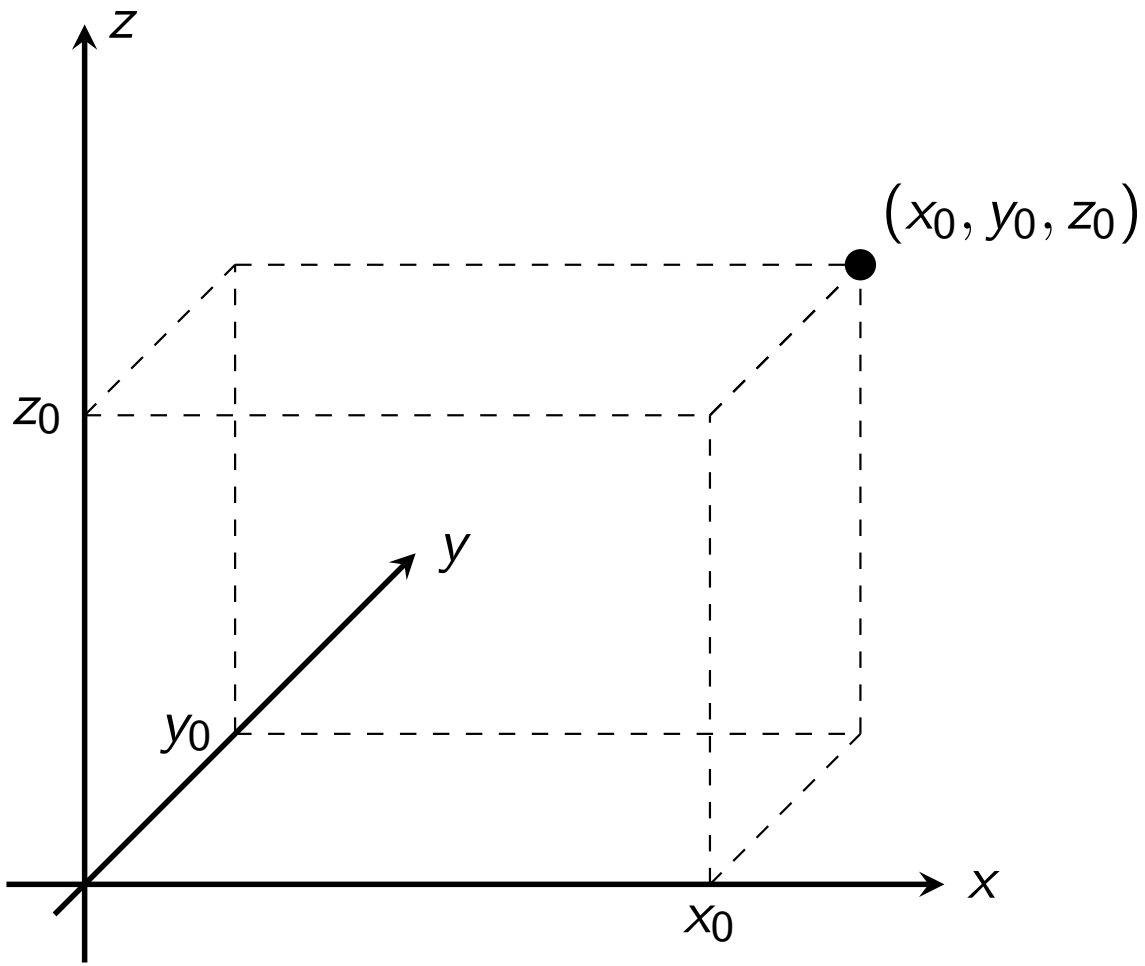
$$f_1'(x,y) = \frac{c}{x} f(x,y)$$

Leite $f(x,y) = x^c \cdot y^d$ partiell nach y ab.

$$f_2'(x,y) = x^c \cdot d\,y^{d-1} = \dots = \frac{d}{y} \cdot f(x,y)$$

14.3 Geometrische Darstellung

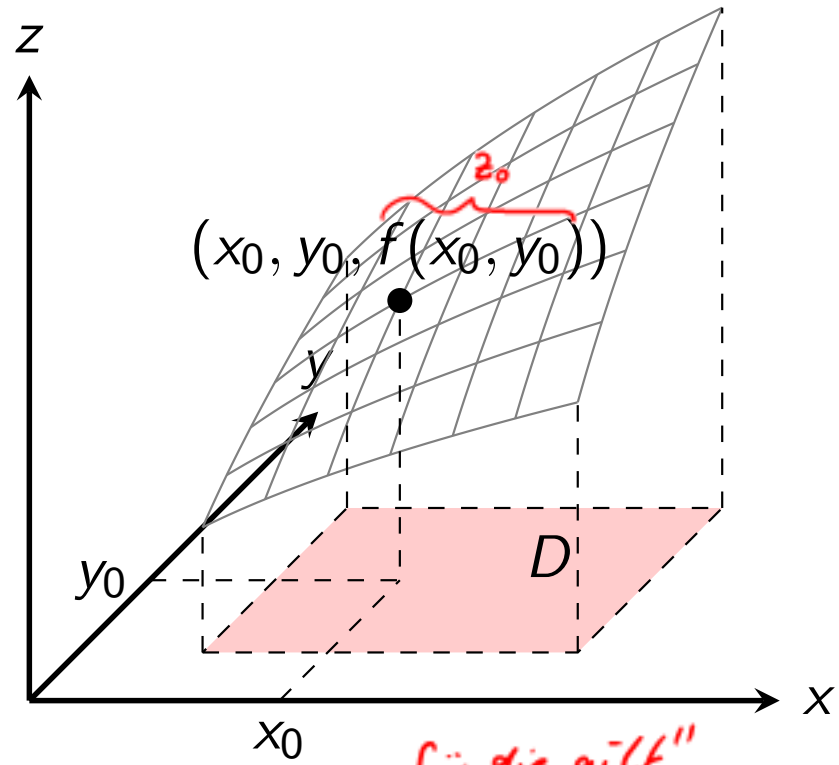
Koordinatensystem mit drei Dimensionen



$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$: „nichtnegativer Oktant“

Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

Der **Graph der Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:



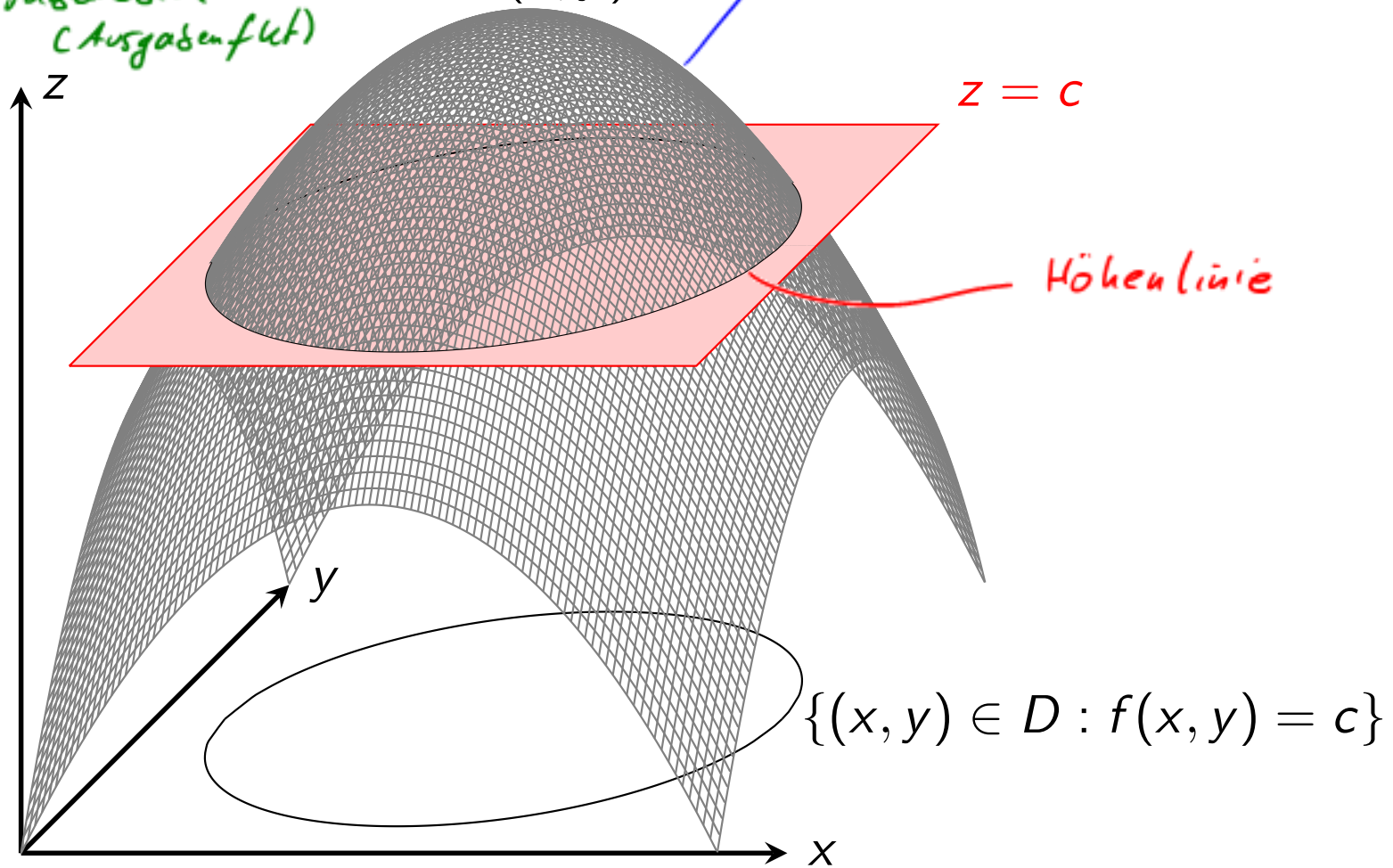
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

Höhenlinien

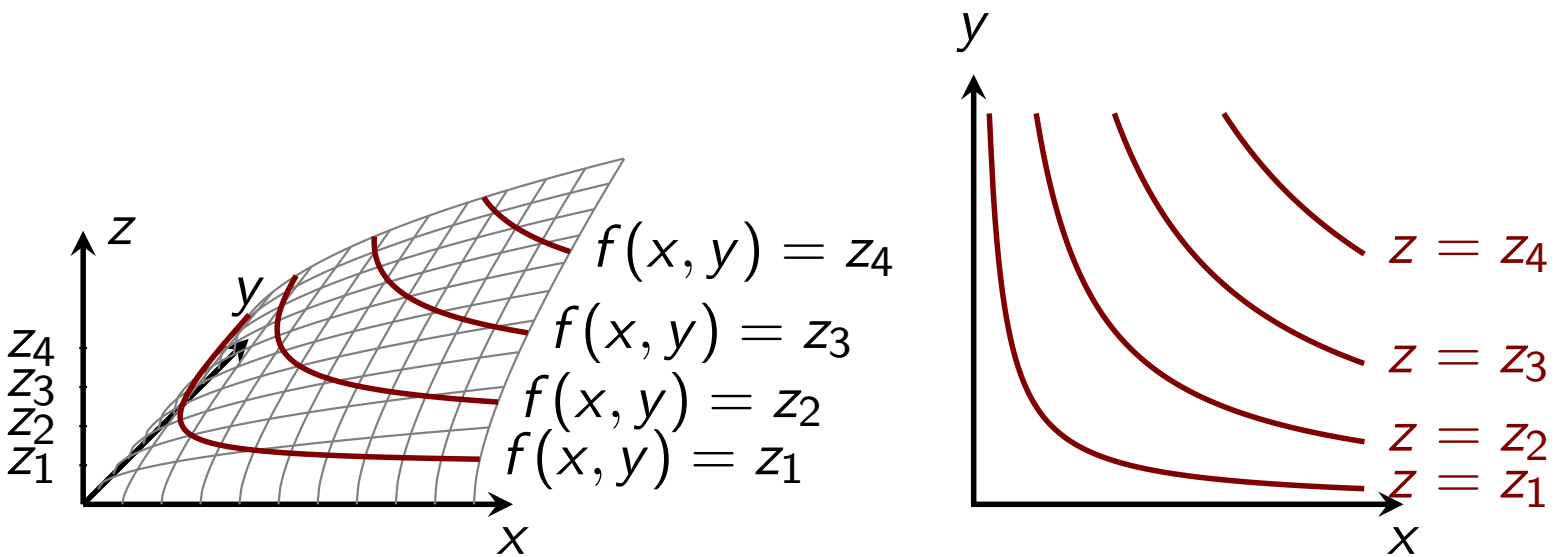
Indifferenzkurve (Nutzenfunktion)
Isoquante (Produktionsfunktion)
Isokostenkurve (Kostenfunktion)
Isoprofitkurve (Gewinnfkt)
Budgetgerade
(Budgetebene
(Ausgabenfkt)

Paraboloid

$z = f(x, y)$



Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion



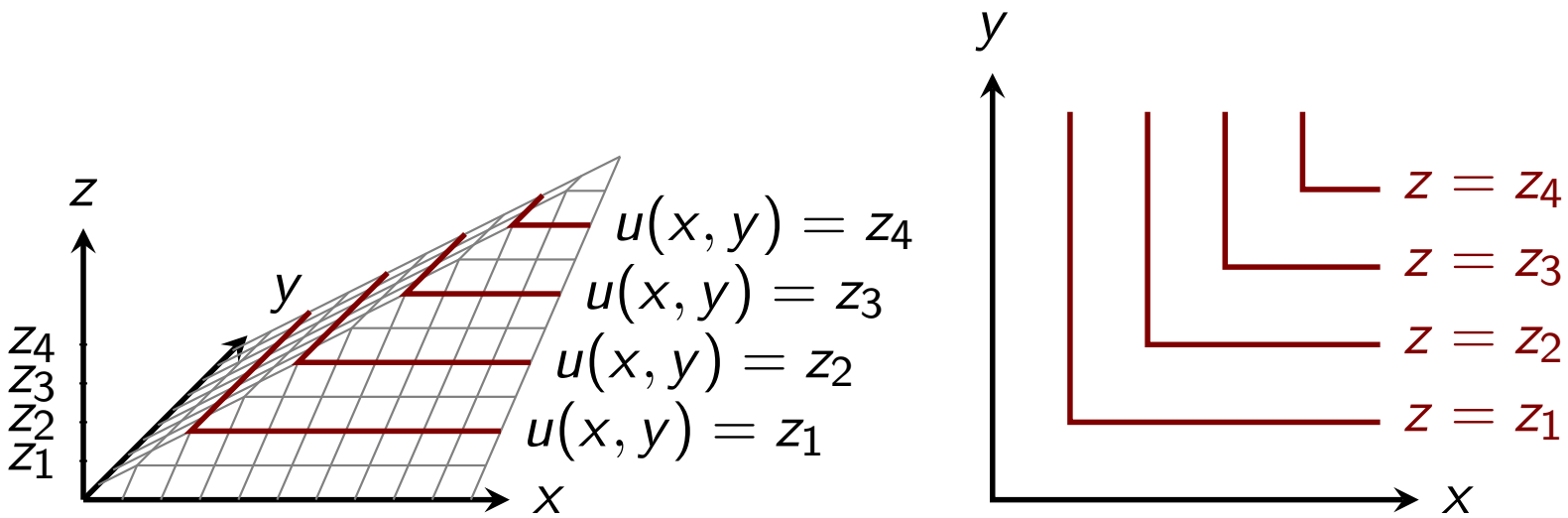
Eine **Isoquante** („gleiche Menge“) gibt an, mit welchen Inputkombinationen (x, y) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

Indifferenzkurven für perfekte Komplemente

Leontief Funktion

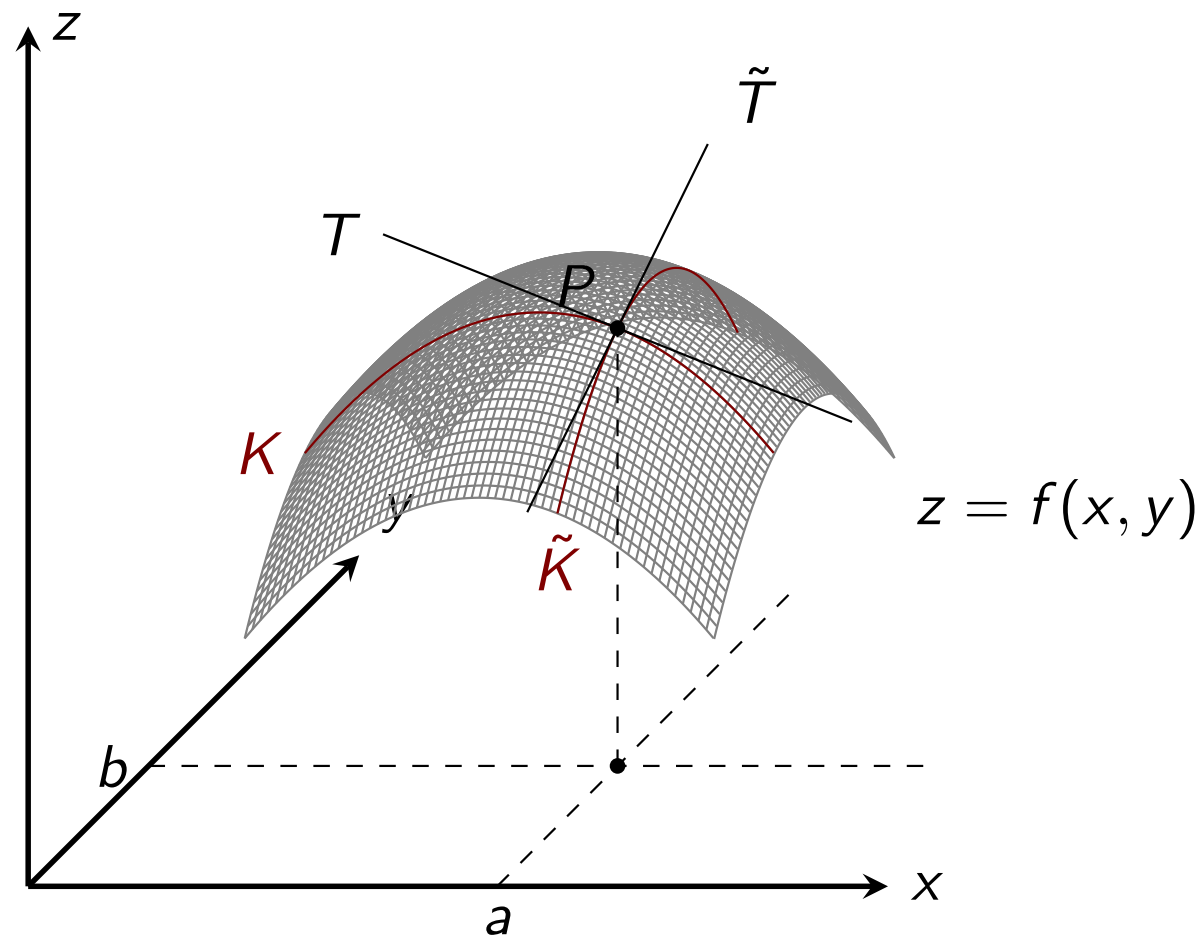
$f(x,y) = \min\{x, y\}$



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x, y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen



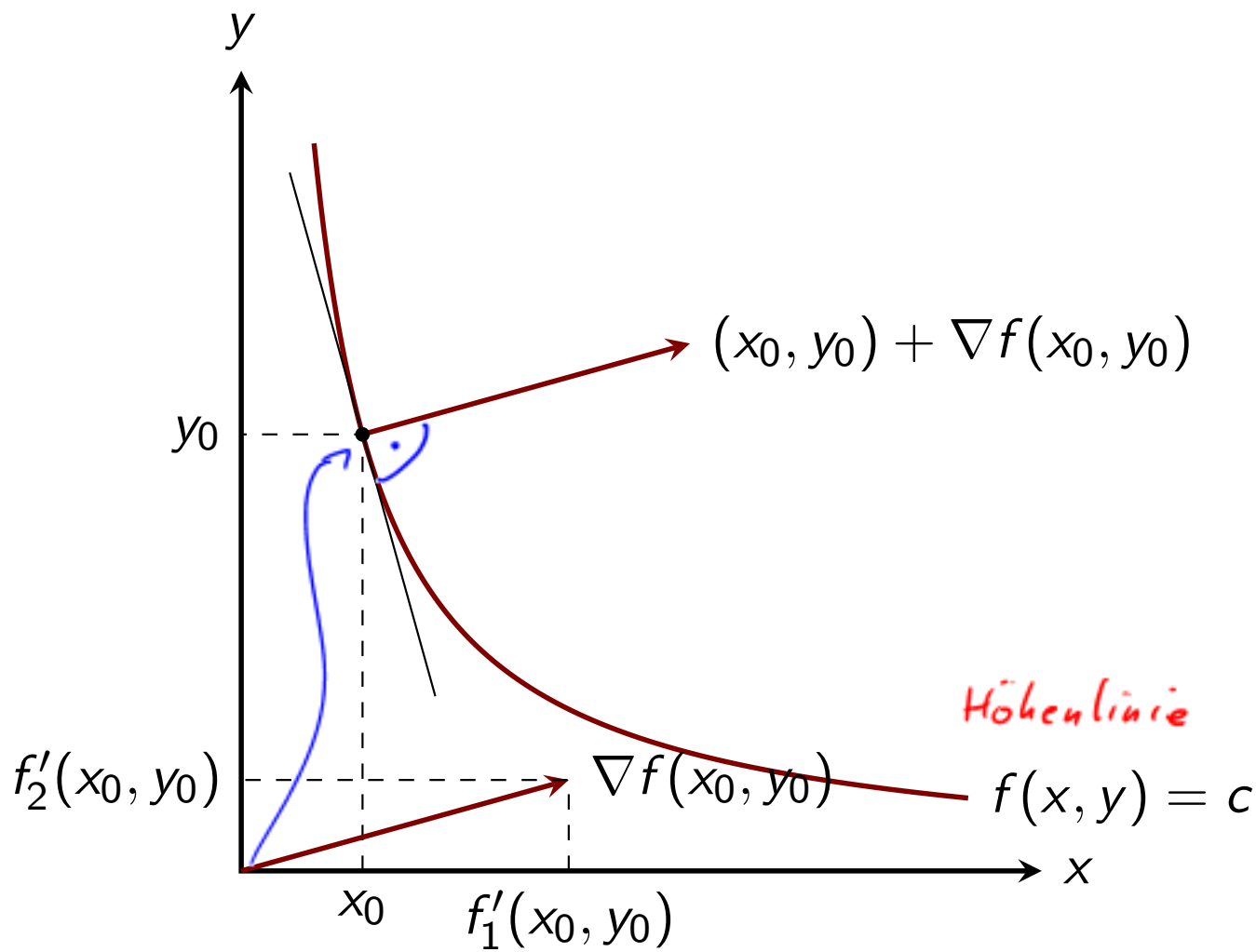
Steigung von T: $f_1'(a, b)$ Steigung von $\tilde{T}$: $f_2'(a, b)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

Gradient:

$$\nabla f(x,y) = (f_1'(x,y), f_2'(x,y))$$

„Nabla"



Der Gradient einer Cobb-Douglas Funktion

$$f(x,y) = x^c y^d$$

1. partielle Ableitungen:

$$f_1'(x,y) = \frac{c}{x} \cdot f(x,y)$$

$$f_2'(x,y) = \frac{d}{y} \cdot f(x,y)$$

Gradient

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{c}{x} \cdot f(x,y), \frac{d}{y} \cdot f(x,y) \right) = \left(\frac{c}{x}, \frac{d}{y} \right) \cdot f(x,y)$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

Zweite Ableitungen von $f(x,y) = 2x + x^2y^3$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2 + 2xy^3$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = 2 \cdot y^3$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 2x\,3y^2 = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 3 \cdot 2x \cdot y^2 = 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2y$$

Zweite Ableitungen von $f(x,y) = x^c y^d$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x,y)cx^{-1} = \frac{c}{x} f(x,y)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y)dy^{-1}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} = -\frac{c}{x}\frac{1-c}{x} f(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{d}{y}\frac{c}{x} \cdot f(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \cdot f(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} = -\frac{d}{y}\frac{1-d}{y} \cdot f(x,y)$$

(ohne Rechnung)

$$f'_1(x,y) = f(x,y)\, c \cdot x^{-1}$$

$$f''_{11}(x,y) = f'_1(x,y)\, c \cdot x^{-1} + f(x,y)\, c \cdot (-1)\, x^{-2}$$

($x^{-2} = x^{-1} \cdot x^{-1}$)

$$= c \cdot x^{-1} \left[f'_1(x,y) - f(x,y)\, x^{-1} \right]$$

$$= c \cdot x^{-1} \left[f(x,y) \cdot c \cdot x^{-1} - f(x,y)\, x^{-1} \right]$$

$$= c \cdot x^{-1} \cdot f(x,y) \cdot x^{-1} \left[c - 1 \right]$$

$$= \frac{c}{x} f(x,y) \frac{c-1}{x}$$

$$= -\left(\frac{c}{x} \frac{1-c}{x} f(x,y) \right)$$

Produktregel

$$\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f'_1(x,y) = f(x,y) \cdot c \cdot x^{-1}$$

$$f''_{12}(x,y) = f'_2(x,y) \cdot c \cdot x^{-1}$$

$$= \frac{d}{y} \cdot f(x,y) \cdot \frac{c}{x}$$

$$= \frac{d}{y} \cdot \frac{c}{x} \cdot f(x,y)$$

Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

„direkte partielle zweite Ableitungen"

Dann heißt

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x,y) & f''_{12}(x,y) \\ f''_{21}(x,y) & f''_{22}(x,y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

Die Ableitungen f''_{12} und f''_{21} nennen wir auch „Kreuzableitungen"

Wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$f''_{12}(x,y) = f''_{21}(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in D \ .$$

Hessematrix der Cobb-Douglas Funktion

$c, d > 0$

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{c}{x}\frac{1-c}{x} & \frac{d}{y}\cdot\frac{c}{x} \\ \frac{c}{x}\frac{d}{y} & -\frac{d}{y}\cdot\frac{1-d}{y} \end{pmatrix} f(x,y)$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = d$$

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z), welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy-Ebene.

Geradengleichung:
$ax + by = d$

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

$$\overbrace{p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z}^{\text{Ausgabenfunktion}} = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der **Budget-Ebene**.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die **Budget-Menge**:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_{\geq} : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\right\}$$

Ausgabenfunktion

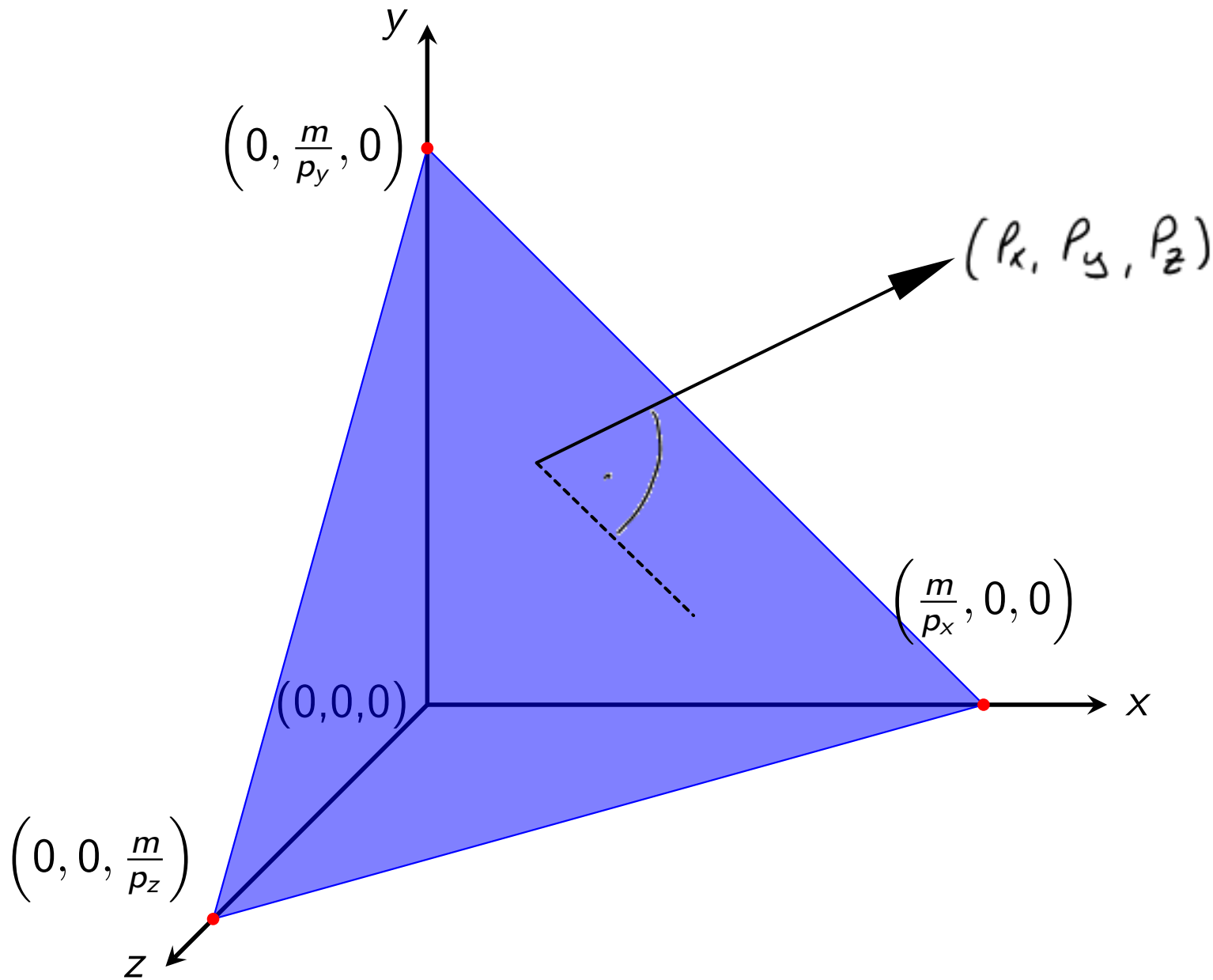
$$\underbrace{(p_x, p_y, p_z)}_{\nabla A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A(x, y, z) = p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z$$

$$A_1' = p_x \qquad A_2' = p_y \qquad A_3' = p_z$$

$$\nabla A = (A_1', A_2', A_3') = (p_x, p_y, p_z)$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene



Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^3$

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (a, b, c) ist

$$d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Eine **Kugel** mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r ist definiert durch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller möglichen n-Vektoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus reellen Zahlen nennen wir n-**dimensionalen Euklidischen Raum** und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}^n$.

Funktion von n Variablen:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Der **Graph** der Funktion f bezeichnet die Menge aller Punkte $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ für die gilt $\mathbf{x} \in D$.

Die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die $f(\mathbf{x}) = z_0$ für $z_0 \in \mathbb{R}$ erfüllen, heißt **Fläche zum Niveau** z_0 von f.

Verschiedene Funktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin“):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots, a_n x_n\}$$

Mittelwerte

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(a) arithmetisches Mittel: $\bar{x}_A := \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

(b) geometrisches Mittel: $\bar{x}_G := \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$)

(c) harmonisches Mittel: $\bar{x}_H := \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$
(für $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$)

Falls $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, dann gilt allgemein:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$$

14.6 Partielle Ableitungen in n Variablen

Falls $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dann bedeutet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, für $i = 1, 2, \ldots, n$ die partielle Ableitung von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nach x_i, wenn alle anderen Variablen x_j für $j \neq i$, konstant gehalten werden.

Interpretation:

Die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ist annähernd gleich der Änderung in $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro Einheit Erhöhung von x_i, während alle anderen x_j, für $j \neq i$ konstant gehalten werden.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_i'(\mathbf{x}) = \lim_{dx_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + dx_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\mathbf{x})}{dx_i}$$

Gradient an der Stelle $\mathbf{x}$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

dann heißt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1'(\mathbf{x}) \\ f_2'(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n'(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x} \in D$.

Zweite partielle Ableitungen in n Variablen

Für jede der n Variablen von f gibt es n partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$$

(falls alle Ableitungen existieren.)

Insgesamt gibt es also n^2 zweite partielle Ableitungen.

Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1n}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(\mathbf{x}) & f''_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $\mathbf{x} \in D$.

f''_{ii}: „direkte partielle Ableitung“

f''_{ij} (mit $i \neq j$): „gekreuzte partielle Ableitung“

Wenn f''_{ij} stetig ist für alle $i, j = 1, \dots, n$, dann gilt

$$f''_{ij}(\mathbf{x}) = f''_{ji}(\mathbf{x}) \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n \text{ und für alle } \mathbf{x} \in D \ .$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3$$

Bestimme den Gradienten $\nabla f(x_1, x_2, x_3)$

und die Hessematrix $f''(x_1, x_2, x_3)$!

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge D.

f ist **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{b})$$

f ist **konkav**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

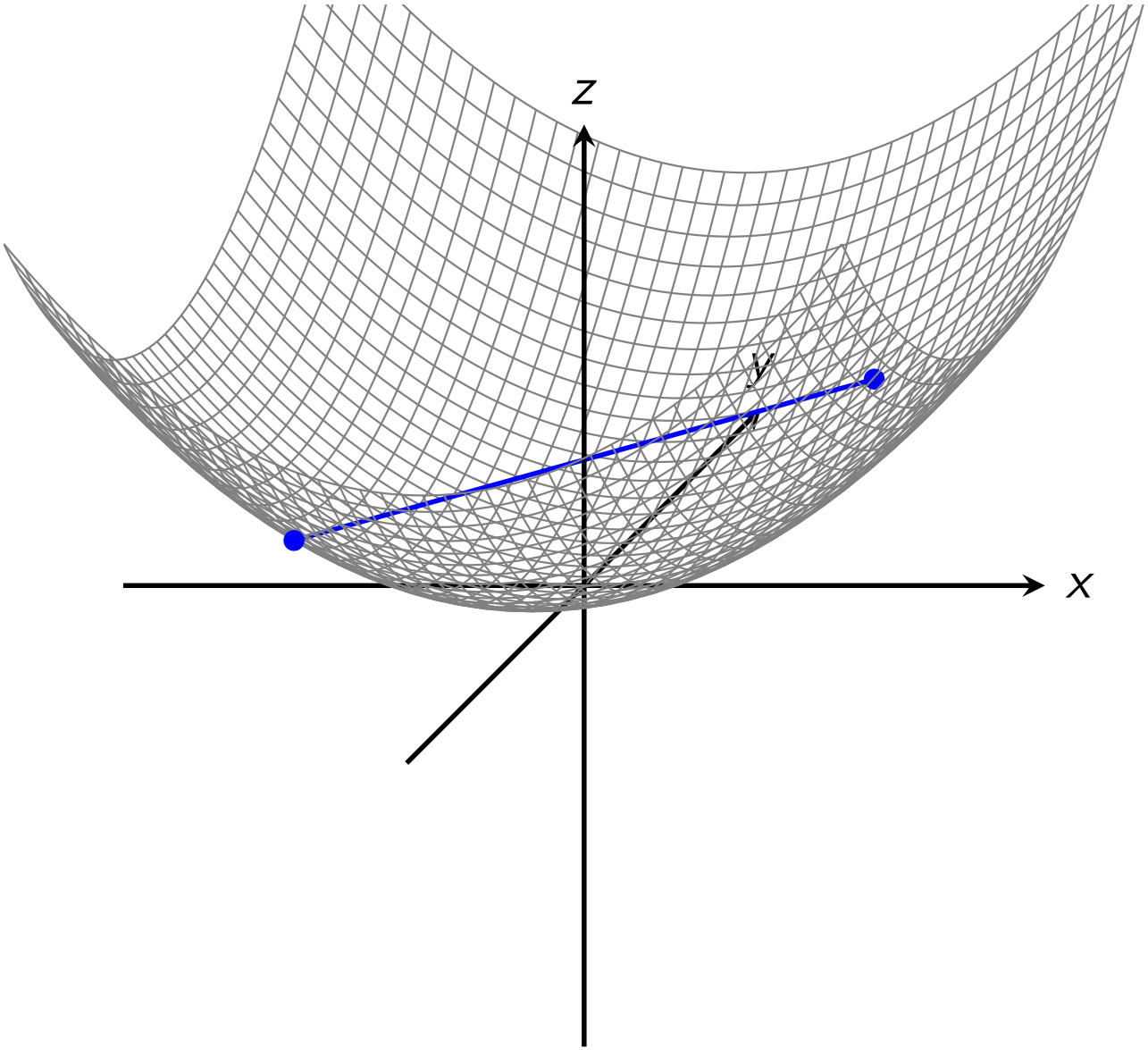
$$f(\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{b})$$

f ist **strikt konvex/konkav** bei $<, >, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \lambda \in (0, 1)$

Falls $D \subseteq \mathbb{R}$: Definition identisch zu Kapitel 8.

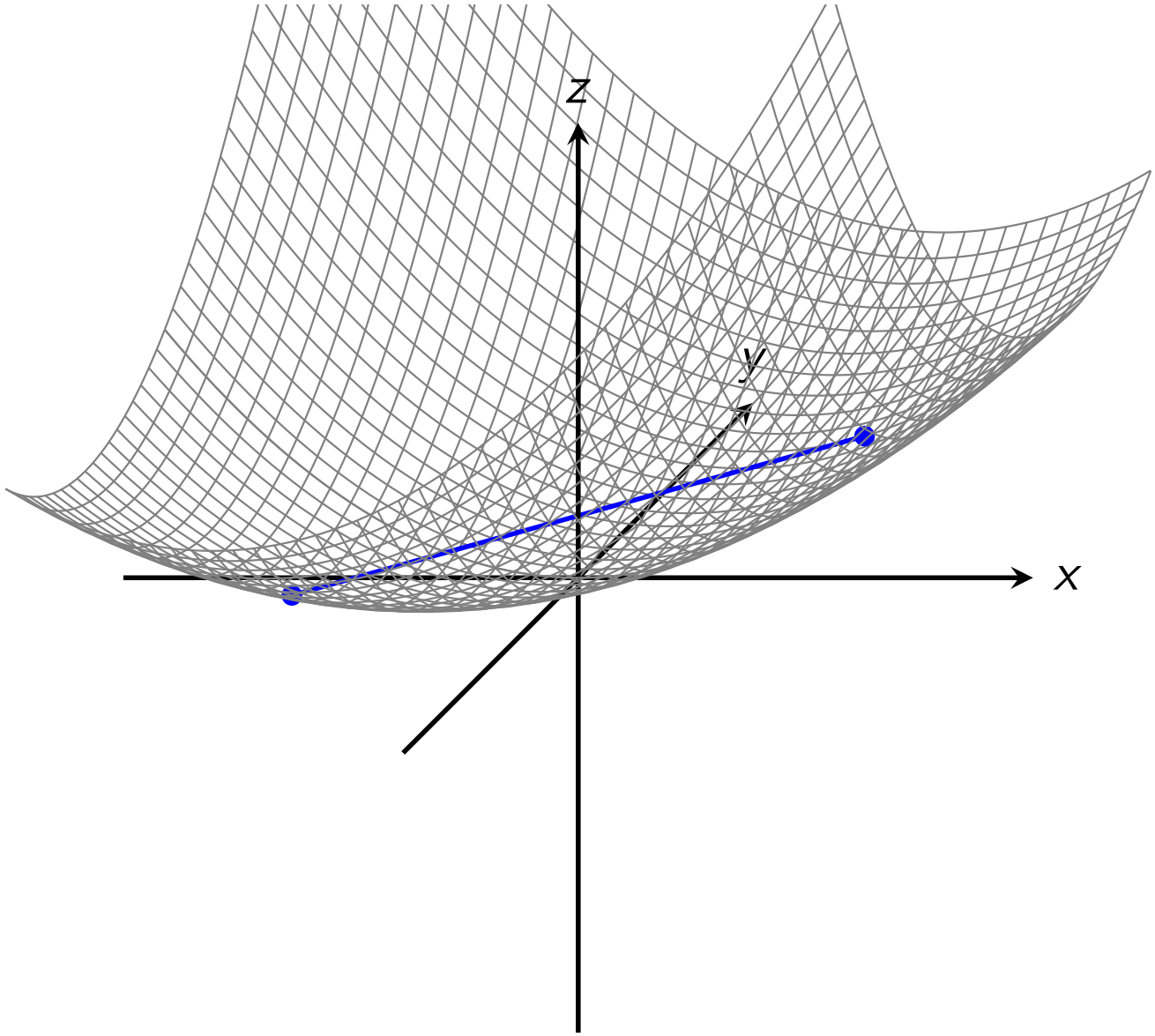
Falls $D \subseteq \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind Vektoren. Die Idee der Definition bleibt aber erhalten.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$



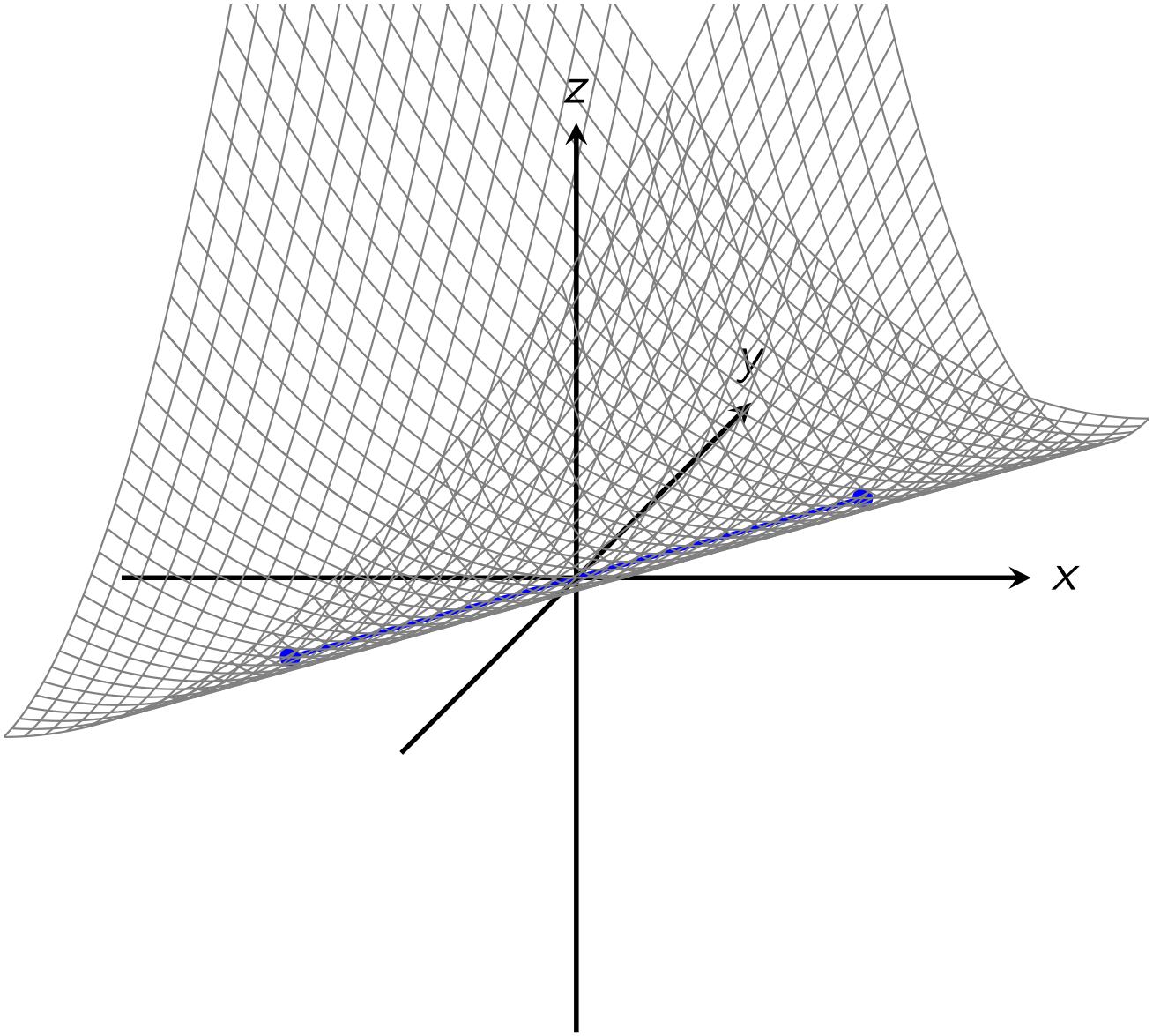
$z = f(x, y)$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$



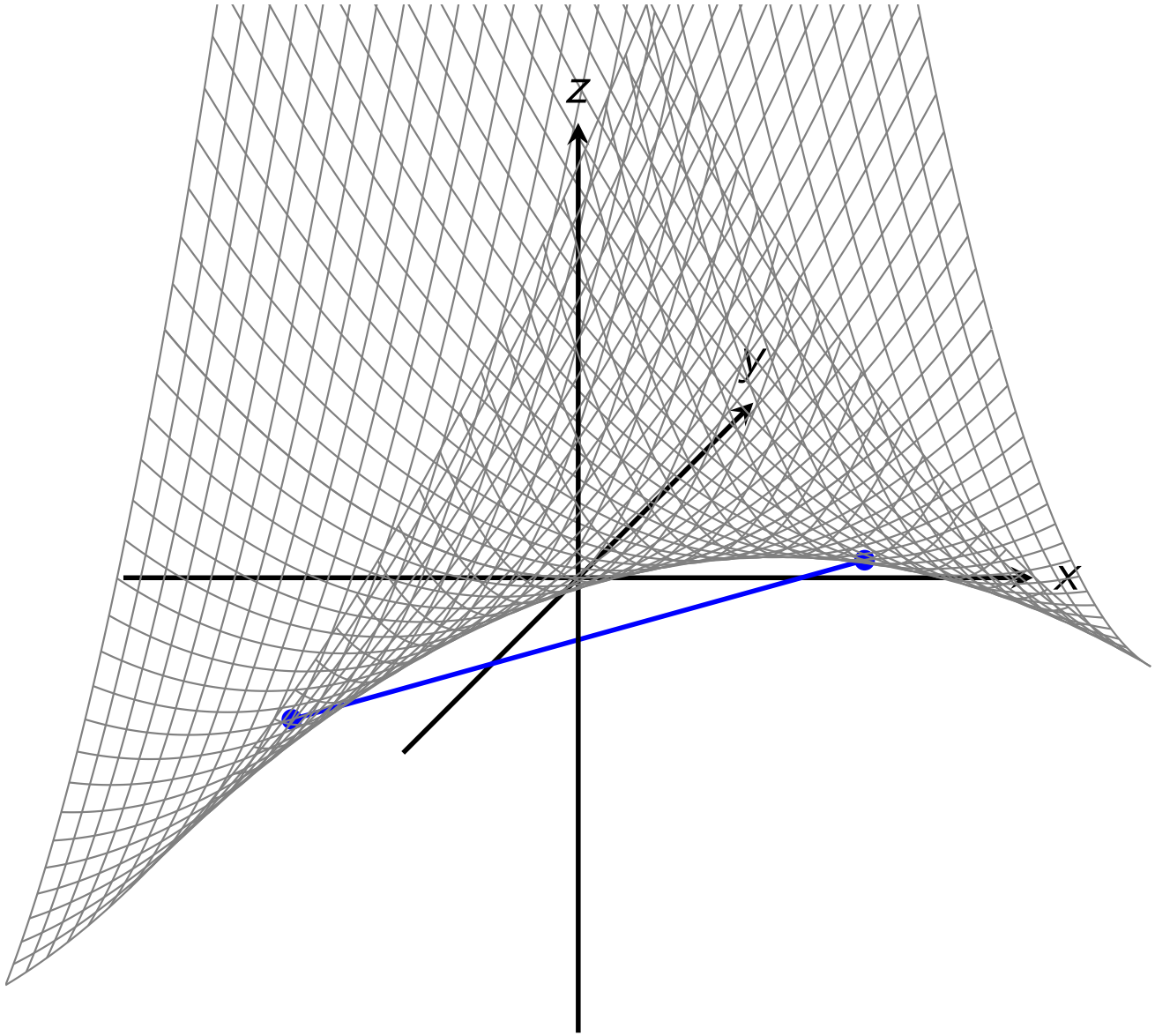
$z = f(x,y)$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$



$z = f(x,y)$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$



$z = f(x,y)$

Konvexität/Konkavität und 2. partielle Ableitungen

In allen drei Beispielen

- $x^2 + y^2$
- $x^2 + y^2 - xy$
- $x^2 + y^2 - 2xy$
- $x^2 + y^2 - 3xy$

gilt $f''_{11} = f''_{22} = 2 > 0$.

Es stellen jedoch nur die ersten zwei Beispiele streng konvexe Funktionen dar.

Bei multivariaten Funktionen kommt es nicht nur auf die Vorzeichen von f''_{ii} an, sondern auf alle zweiten partiellen Ableitungen.

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \geq 0 \text{ und } |f''(\mathbf{x})| \geq 0$$

$$f \text{ streng konvex } \Leftarrow f''_{11}, f''_{22} > 0 \text{ und } |f''(\mathbf{x})| > 0$$

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \leq 0 \text{ und } |f''(\mathbf{x})| \geq 0$$

$$f \text{ streng konkav } \Leftarrow f''_{11}, f''_{22} < 0 \text{ und } |f''(\mathbf{x})| > 0$$

Beachte, dass jede zweite partielle Ableitung von dem jeweiligen Punkt $\mathbf{x}$ abhängen kann. Die Ungleichungen müssen für jeweils alle Punkte $\mathbf{x} \in D$ gelten.

Falls in einem Punkt $\mathbf{x}$ gilt, dass $|f''(\mathbf{x})| < 0$, dann ist die Funktion weder konvex noch konkav.

Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 - t \cdot xy$

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \text{ positiv semi definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ streng konvex } \Leftarrow \quad f''(\mathbf{x}) \text{ positiv definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \text{ negativ semi definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ streng konkav } \Leftarrow \quad f''(\mathbf{x}) \text{ negativ definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

14.9 Ökonomische Anwendung: Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Die Hesse-Matrix der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$f(x,y) = x^c y^d \text{ mit } c,d > 0$$

haben wir für $x, y > 0$ bereits berechnet:

$$f''(x,y) = f(x,y) \begin{pmatrix} -\frac{c}{x}\frac{1-c}{x} & \frac{c}{x}\frac{d}{y} \\ \frac{c}{x}\frac{d}{y} & -\frac{d}{y}\frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (streng) konkav für $x, y > 0$?

14.9 Ökonomische Anwendung: Leontief Produktionsfunktion

Die Leontief Produktionsfunktion ist definiert durch:

$$f(x, y) = \min\{cx, dy\} \text{ mit } c, d > 0$$

Problem: Entlang der Gerade $cx = dy$ hat die Funktion eine Falte; sie ist dort nicht differenzierbar.

$$f(x, y_0) = \begin{cases} cx & \text{falls } cx \leq dy_0 \\ dy_0 & \text{falls } cx > dy_0 \end{cases}$$

Ist diese Produktionsfunktion (streng) konkav?

Zusammenfassung

- Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- Geometrische Darstellung:
  Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- Ebenen und Abstand
- Erste und zweite partielle Ableitungen:
  Gradient und Hesse-Matrix
- Konvexe und konkave Funktionen