Übung 6 zu Kapitel 13:[1]

Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Teil 3

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

13.6 Die Inverse einer Matrix

Aufgabe 13.6.2 von Seite 604

Aufgabe 13.6.3 von Seite 604

13.7 Eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Inverse

Aufgabe 13.7.5 von Seite 609

Aufgabe 13.6.2 von Seite 604

Bestimme Zahlen a und b, so dass **A** die Inverse von **B** wird, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & \frac{1}{4} & b \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3×3 $\qquad$ 3×3

A ist die Inverse B, falls $A \cdot B = I$, $B \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & \frac{1}{4} & b \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A $\qquad$ B $\qquad$ I

$\Rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$

$b = -\frac{3}{4}$

$a \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$

$a \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + b \cdot 3 = 1$

$\Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = -a}$

$\Leftrightarrow 2a + 3b = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 2a + 3 \cdot (-a) = -a = \frac{3}{4}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ (-1) \\ (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ (-2) \\ :(-8) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ (-6) \\ \cdot 8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{B^{-1}}$$

Aufgabe 13.6.3 von Seite 604

$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$

Löse die folgenden Gleichungssysteme indem Du die Inverse der Koeffizientenmatrix bildest und diese dann mit dem Vektor der rechten Seiten multiplizierst:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $|A| = 2\cdot(-4) - 3(-3) = -8+9 = 1$

a)

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 3 + 3\cdot 5 \\ -3\cdot 3 + 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 3x - 4y &= 11 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 8 + 3\cdot 11 \\ -3\cdot 8 + 2\cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c)

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\neq 0}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 3x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ LGS eindeutig lösbar

$(x,y) = (0,0)$ ist bei homogenen LGS immer eine Lsg.

Aufgabe 13.7.5 von Seite 609

Verwende die Methode der elementaren Zeilenoperation, um die Inversen, falls sie existieren, für jede der drei Matrizen zu bestimmen:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

a)

1	2	1	0
3	4	0	1

$\cdot(-3)$

1	2	1	0
0	-2	-3	1

$\cdot(1)$ $\quad :(-2)$

1	0	-2	1
0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

hier: $\frac{1}{1 \cdot 4 - 3 \cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b)

$\begin{matrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$

$\cdot(-2)$, (-3)

$\begin{matrix}1&2&3\\0&0&-1\\0&-1&-3\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{matrix}$

$\cdot 2$, $\cdot(-1)$, $\cdot(-1)$

$\begin{matrix}1&0&-3\\0&0&1\\0&1&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}-5&0&2\\2&-1&0\\3&0&-1\end{matrix}$

$\begin{matrix}1&0&-3\\0&1&3\\0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}-5&0&2\\3&0&-1\\2&-1&0\end{matrix}$

(-3), $\cdot 3$

$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{matrix}$

Probe

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{1\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 3}_{1} & \underbrace{1\cdot 2 + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 5}_{0} & \underbrace{1\cdot 3 + (-3)\cdot 5 + 2\cdot 6}_{=0} \\ & & 0 \\ & & \end{pmatrix}$$

✓

c)

$$\begin{array}{rrr|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \cdot\left(\tfrac{1}{3}\right) \quad \cdot 3$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} & \frac{23}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Nullzeile: Det = 0 $\Rightarrow$ Inverse ist nicht definiert