Übung 4 zu Kapitel 13:[1]

# Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Teil 1

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

# Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

## 13.1 Determinanten der Ordnung 2

- Aufgabe 13.1.1
- Aufgabe 13.1.3

## 13.2 Determinanten der Ordnung 3x3

- Aufgabe 13.2.1

## 13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

- Aufgabe 13.4.3 von Seite 594
- Aufgabe 13.4.7 von Seite 594
- Aufgabe 13.4.8 von Seite 594
- Aufgabe 13.5.1 von Seite 598

# Aufgabe 13.1.1

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

$3^t = 3^{t-1} \cdot 3^1 = 3^{t-1+1}$

$2^t = 2^{t-1} \cdot 2$

Berechne folgende Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$

Allgemein

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b c$

a) $3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = 18$

b) $a \cdot b - b \cdot a = 0$

c) $(2-x)(-x) - 8 \cdot 1$

$= -2x + x^2 - 8$

d) $(a+b)(a+b) - (a-b)(a-b)$

$= \underbrace{(a+b)}_{x}^2 - \underbrace{(a-b)}_{y}^2$

$= (a+b+a-b)(a+b-(a-b)) = 2a \, 2b = 4ab$

e) $3^t 2^{t-1} - 3^{t-1} \cdot 2^t$

$= 3^{t-1} \cdot 2^{t-1}(3-2) = 6^{t-1}$

# Aufgabe 13.1.3

Verwende die Cramer'sche Regel, um die folgenden Gleichungssysteme nach $x$ und $y$ aufzulösen. Überprüfe die Antworten durch Einsetzen.

$$a) \quad \begin{array}{rcrcl} 3x & - & y & = & 8 \\ x & - & 2y & = & 5 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ 3x & - & 2y & = & 14 \end{array}$$

$$c) \quad \begin{array}{rcrcl} ax & - & by & = & 1 \\ bx & + & ay & = & 2 \end{array}$$

a) $\begin{matrix} 3x & -y & = 8 \\ x & -2y & = 5 \end{matrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1(-1) = -6 + 1 = -5 \neq 0$

$x$

$\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-2) - 5(-1) = -16 + 5 = -11$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$

Probe:

$3 \cdot \frac{11}{5} - \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{33}{5} + \frac{7}{5} = \frac{40}{5} = 8$ ✓

$\frac{11}{5} - 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{11}{5} + \frac{14}{5} = \frac{25}{5} = 5$ ✓

$y$

$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 8 = 15 - 8 = 7$

$\Rightarrow \quad y = \frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 3 \cdot 3 = -2 - 9 = -11 \neq 0$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{(rechte Seite)}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{x}{1} & 3 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 14 \cdot 3 = -2 - 42 = -44$$

$$\rightsquigarrow \quad x = \frac{-44}{-11} = \frac{44}{11} = 4$$

$1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1$

$3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 12 + 2 = 14$

$$\begin{vmatrix} 1 & \overset{b}{1} \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 - 3 \cdot 1 = 11$$

$$\rightsquigarrow \quad y = \frac{11}{-11} = -1$$

c) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$|A| = a \cdot a - b(-b) = a^2 + b^2$ (für $a, b$ nicht beide $= 0$)

$$\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 2 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a - 2(-b) = a + 2b$$

$$\rightsquigarrow x = \frac{a+2b}{a^2+b^2}$$

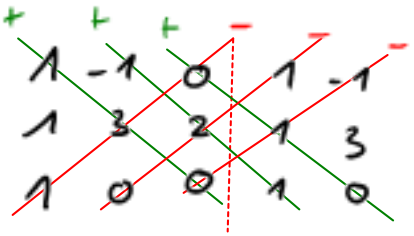
$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = a \cdot 2 - b \cdot 1 = 2a - b$$

$$\rightsquigarrow y = \frac{2a-b}{a^2+b^2}$$

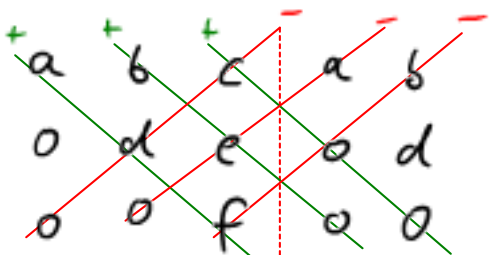
# Aufgabe 13.2.1

Verwende die Regel von Sarrus, um die Determinanten der folgenden Matrizen zu berechnen:

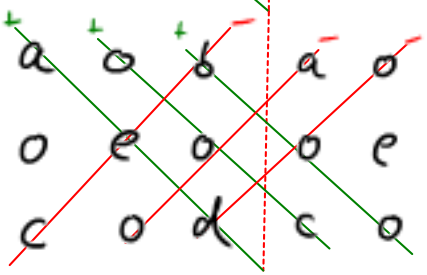
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$



$$|A| = 1 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot (-1) = -2$$



$$|B| = a \cdot d \cdot f$$



$$|C| = aed - ceb = e(ad - cb)$$

# Aufgabe 13.4.3 von Seite 594

Berechne die folgenden drei Determinanten so einfach wie möglich:

a)

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \leftarrow -0\,|A_{21}| + 0\,|A_{22}| - 0\,|A_{23}| = 0$$

b)

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix}}_{B} \quad +\cdot 3 \quad = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c)

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}}_{C} \rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -x & 1 & 0 \\ a_3 & 0 & -x & 1 \\ a_4 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}}_{C'}$$

$$= +(a_1 - x)\cdot |C'_{11}| - 0 + 0 - 0$$

$$= (a_1 - x)(-x)(-x)(-x)$$

$$= -(a_1 - x)x^3$$

# Aufgabe 13.4.7 von Seite 594

$X'X$ symmetrisch

$(X'X)' = X'X'' = X'X$

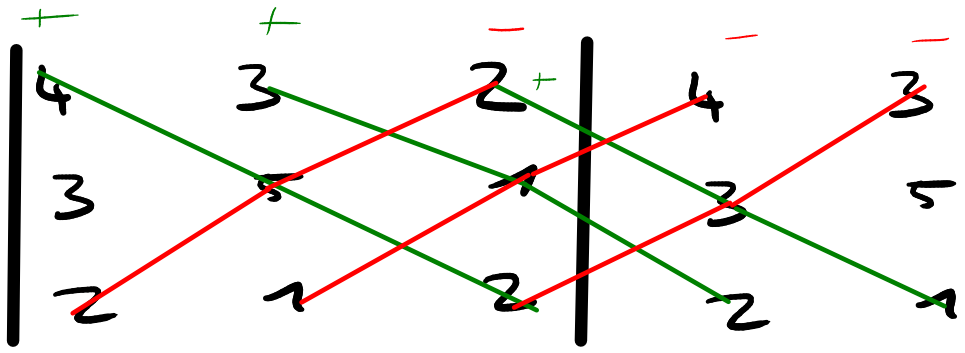
Berechne $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ und $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$, wenn

$$\underset{4\times 3}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 3}{X'X} = \underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1}_{4} & \underbrace{1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 0}_{3} & \underbrace{1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1}_{2} \\ 3 & \underbrace{0\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 0}_{5} & \underbrace{0\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 1}_{1} \\ 2 & 1 & \underbrace{0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 1}_{2} \end{pmatrix}$$

# Sarrus




$$= \underbrace{4\cdot 5\cdot 2}_{40} + \underbrace{3\cdot 1\cdot 2}_{6} + \underbrace{2\cdot 3\cdot 1}_{6}$$

$$- \underbrace{2\cdot 5\cdot 2}_{20} - \underbrace{1\cdot 1\cdot 4}_{4} - \underbrace{2\cdot 3\cdot 3}_{18}$$

$$= 52 - 42 = 10$$

$$|A^1A| \geq 0$$

Falls $A$ voller Spaltenrang: $|A^1A| > 0$

# Aufgabe 13.4.8 von Seite 594

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ ($A$: $n \times n$, $B$: $n \times n$)

Berechne $|\mathbf{A}_a|$ für jedes $a$, wenn

$$\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a^2+1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(-1)

Exponent

Für $a = 1$ berechne $|\mathbf{A}_1^6|$. $a = 1$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a \cdot 1 - 2 \cdot 2) = a^2(a-4)$$

$$|A_1^6| = |A_1|^6 = (1^2(1-4))^6 = (-3)^6 = 3^6 = 9^3$$

# Aufgabe 13.5.1 von Seite 598

Berechne die folgenden Determinanten:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} \quad \downarrow(-1) \quad \downarrow(-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} \quad \downarrow(-2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} \quad + \quad - \quad +$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 12 - 2 \cdot 5)$$

$$= 2$$

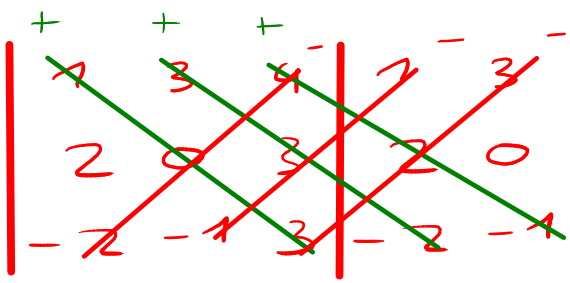
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +(-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{-41} + 11\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-1}$$

$$= 41 - 11 = 30 \checkmark$$

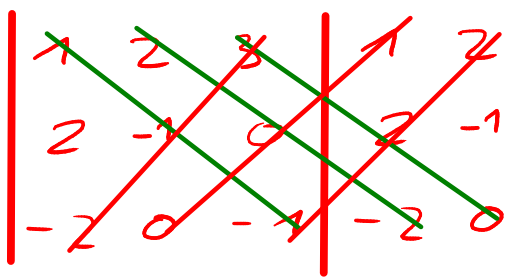
Sarrus



$$= \underbrace{1\cdot 0\cdot 3}_{0} + \underbrace{3\cdot 3\cdot(-2)}_{-18} + \underbrace{4\,2\cdot(-1)}_{-8}$$

$$\underbrace{-(2)0\cdot 4}_{0} - \underbrace{(-1)3\cdot 1}_{3} - \underbrace{3\cdot 2\,3}_{-18}$$

$$= -26 - 15 = -41$$



$$= \underbrace{1\cdot(-1)(-1)}_{1} + \underbrace{2\cdot 0\cdot(-2)}_{0} + \underbrace{3\cdot 2\cdot 0}_{0}$$

$$- \underbrace{(-2)(-1)\,3}_{-6} - \underbrace{0\cdot 0\cdot 1}_{0} - \underbrace{(-1)\cdot 2\cdot 2}_{4}$$

$$= 1 - 6 + 4 = -1$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad (-2) \quad \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & 2 & 3 & 4 \\ \overset{-}{0} & -1 & 0 & 11 \\ \overset{+}{0} & -5 & -6 & -5 \\ \overset{-}{0} & 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 11 \\ -5 & -6 & -5 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 11 \\ -5 & -6 & -5 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} \quad (-5) \quad \cdot 4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 11 \\ 0 & -6 & -60 \\ 0 & 5 & 55 \end{vmatrix} = (-6)\cdot 5 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} \quad (-1)$$

$$= -30 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -30(-1)\cdot 1 \cdot 1 = 30 \checkmark$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$