Vorlesung zu Kapitel 13:[1]

Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

13.2 Determinanten der Ordnung 3

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Rang einer Matrix

Basis

13.6 Die Inverse einer Matrix

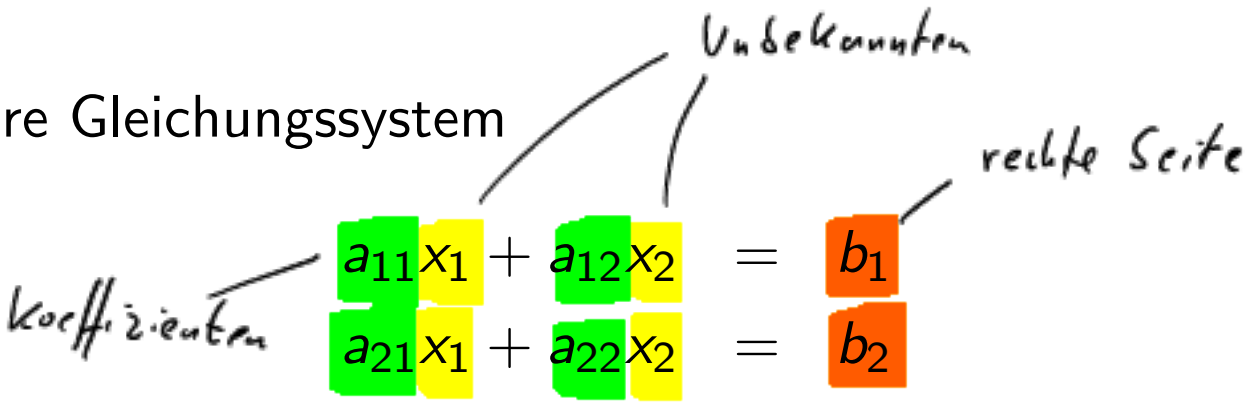
13.7 Eine allgemeine Form für die Inverse

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

13.12 Quadratische Formen

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem



bzw.

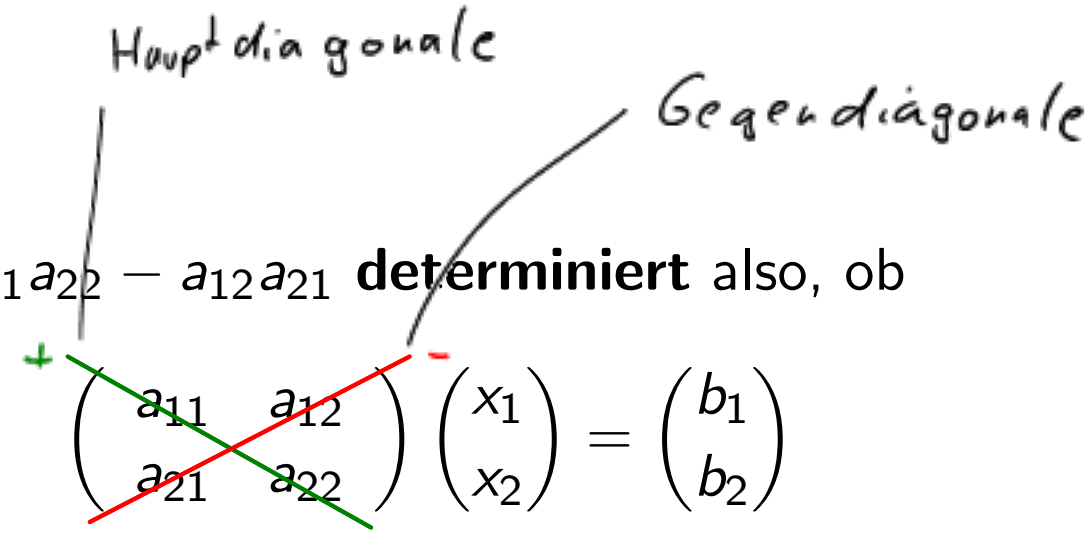
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

falls $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$.

Determinanten der Ordnung 2



Der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **determiniert** also, ob

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix **A** und schreiben $det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 13.1.1

Die Matrix **A** laute

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\mathbf{A}|$!

$$|A| = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5 \neq 0$$

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

$\det: b_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot b_2$

$= 2 \cdot b_1 - b_2$

$\det: a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$

$= 4 \cdot b_2 - 3 b_1$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Beispiel 13.1.2

Probe: 1. Gleichung: $2\frac{1}{2} + 4\frac{3}{2} = 1 + 6 = 7$ ✓

Berechne mit der Cramer'schen Regel die Lösung des Gleichungssystems

2. Gleichung: $2\cdot\frac{1}{2} - 2\frac{3}{2} = 1 - 3 = -2$ ✓

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$2\cdot(-2) - 4\cdot 2$

$\rightsquigarrow \det(A) = -12$

→ Nenner von x_1 & x_2

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{7} & 4 \\ \textcolor{red}{-2} & -2 \end{pmatrix} \quad (\textcolor{red}{x_1})$$

$7\cdot(-2) - 4\cdot(-2)$

$\rightsquigarrow \det = -6$

→ Zähler von x_1

$$\begin{pmatrix} 2 & \textcolor{red}{7} \\ 2 & \textcolor{red}{-2} \end{pmatrix} \quad (\textcolor{red}{x_2})$$

$2\cdot(-2) - 7\cdot 2$

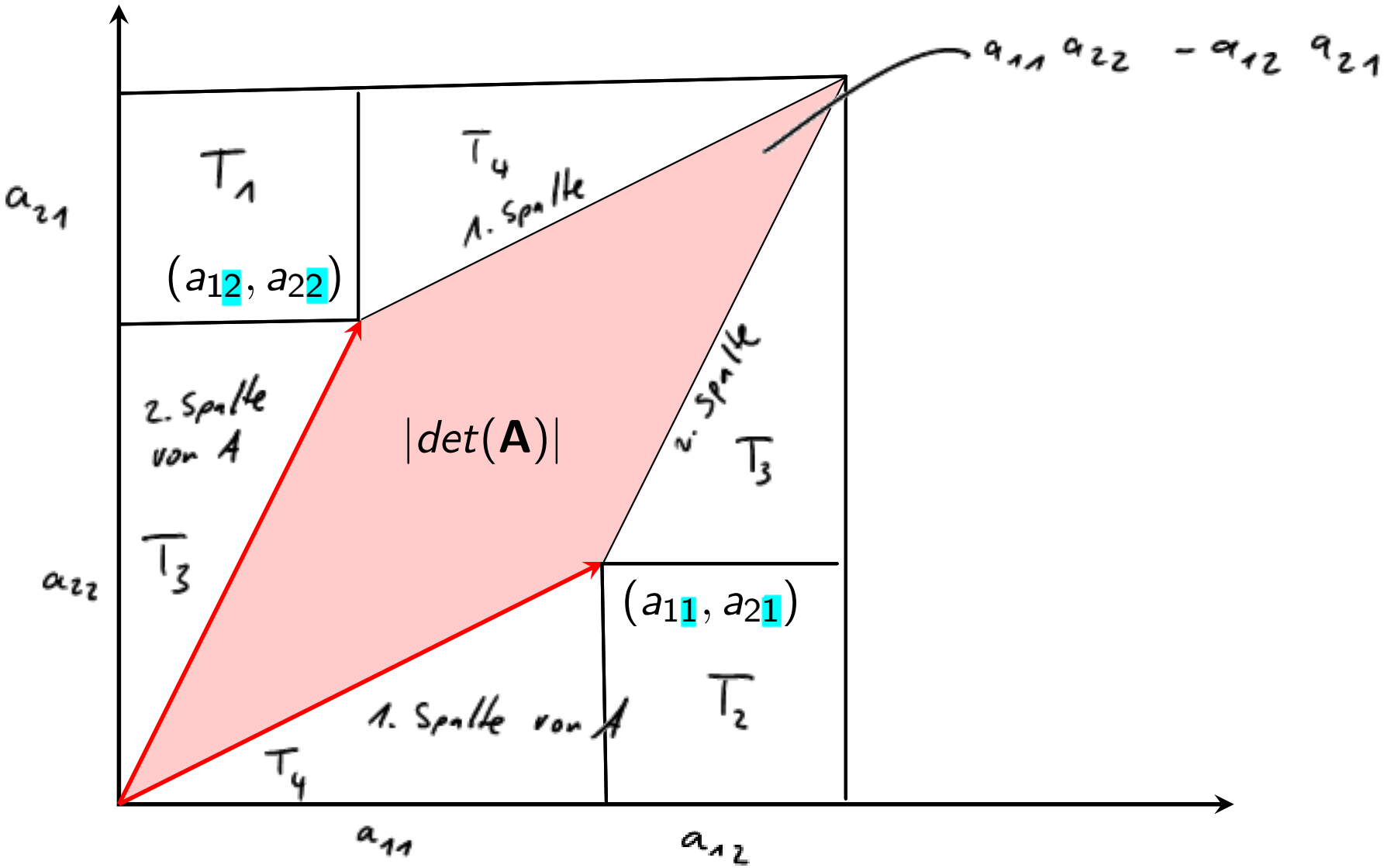
$\rightsquigarrow \det = -18$

→ Zähler von x_2

$$x_1 = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$$

Geometrische Interpretation der Determinante



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung 3×3:

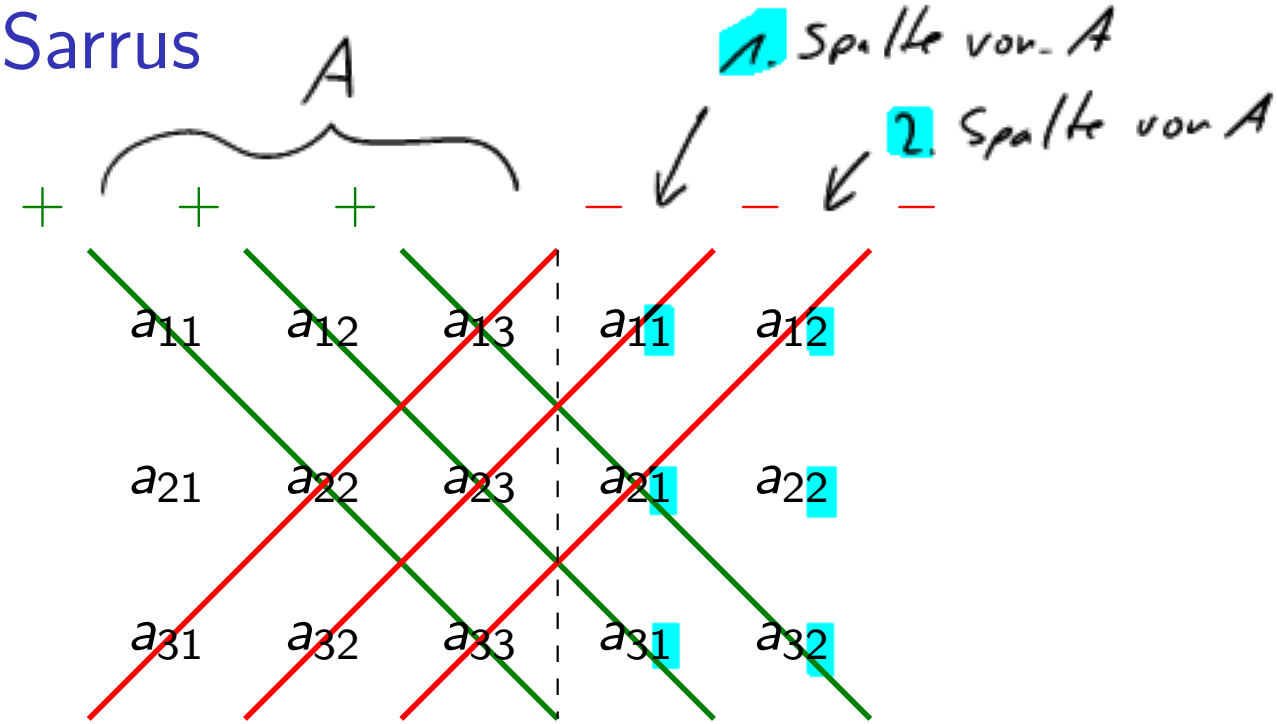
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| \quad = \quad & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus



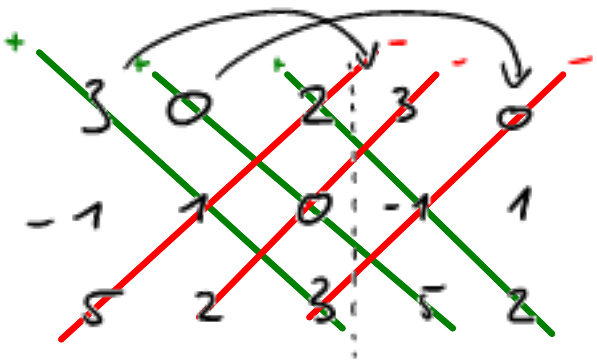
$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= +a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

Beispiel 13.2.1

Berechne die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Regel von Sarrus.



$$\det(A) = \underbrace{3 \cdot 1 \cdot 3}_{} + \overbrace{\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 5}_{}}^{=0} + \underbrace{2 \cdot (-1) \cdot 2}_{} - \underbrace{5 \cdot 1 \cdot 2}_{} - \underbrace{2 \cdot 0 \cdot 3}_{=0} - \underbrace{3 \cdot (-1) \cdot 0}_{=0}$$

$$= 9 - 4 - 10 = -5 \neq 0$$

Lösung eines 3×3-Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$).

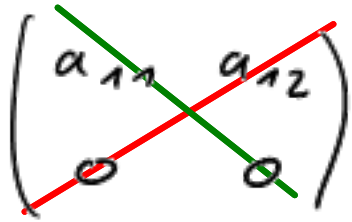
13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$. Dann gilt:

1. Falls $\mathbf{A}$ eine 0-Zeile (oder 0-Spalte) hat, dann $|\mathbf{A}| = 0$.
2. $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
3. Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$)
4. Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
5. Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.

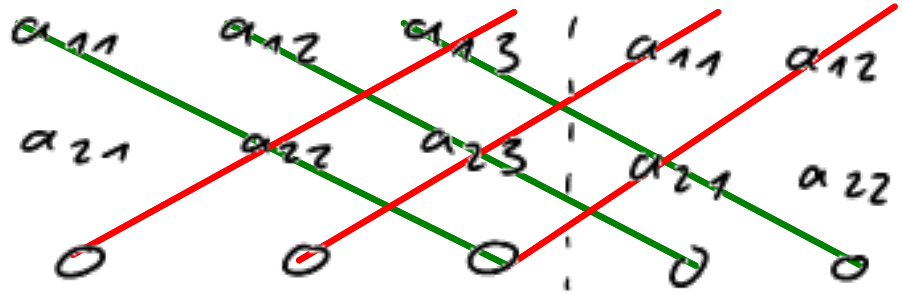
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (wobei $\mathbf{B}$ $n \times n$)

① für $n=2$



$\rightsquigarrow$ det $a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{12} = 0$ ✓

① für $n=3$



jedes der 6 Produkte hat eine Null

$\rightsquigarrow$ det $= 0$

① für homogene Gleichungssysteme $Ax = 0$

$\rightsquigarrow$ die „Zählerdeterminante" hat eine Null-Spalte

$\rightsquigarrow$ deren Determinante $= 0$

$\rightsquigarrow$ $x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Streichmatrix $\mathbf{A}_{ij}$ einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schachbrettvorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Determinante einer Matrix der Ordnung $n \times n$

Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist für eine beliebige Zeile i gegeben durch

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

In Summenschreibweise:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Analog für die Festlegung auf eine beliebige Spalte j:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Wähle – falls möglich – eine Zeile i oder Spalte j mit vielen Nullen!

Determinante der Ordnung 1

$A \in \mathbb{R}^{1\times 1} \rightsquigarrow |A| = A$

$n = 2$

$$|A| = \sum_{i=1} (-1)^{1+1} a_{11} \cdot |A_{11}| + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |A_{12}|$$

$$(+1)\, a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12}\, a_{21}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$A_{11} = \begin{matrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad |A_{11}| = a_{22}$$

$$A_{12} = \begin{matrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad |A_{12}| = a_{21}$$

Beispiel 13.2.1

Berechne die Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Entwicklung nach Co-Faktoren.

$i = 1$ ... 1. Zeile

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +3(1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) + 2(-1 \cdot 2 - 5 \cdot 1)$$

$$= 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-7) = 9 - 14 = -5$$

Vgl Folie 11

Beispiel

Wie lautet die Determinante der (Dreiecks-)Matrix **A**?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 & -3 \\ 0 & a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Wähle 4. Zeile

$$|A| = -0 \cdot |A_{41}| + 0 \cdot |A_{42}| - 0 \, |A_{43}| + a_{44} \, |A_{44}|$$

$$= a_{44} \left(+0 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ a_{22} & -5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} a_{11} & 7 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 2 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot 2} \right)$$

$$= a_{44} \, a_{33} \, a_{22} \, a_{11}$$

Beispiel 13.2.3

$2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 = -3$ ✓

Löse das folgende Gleichungssystem nach der Cramer'schen Regel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & & & + & 2x_3 & = & 8 \\ & & 6x_2 & - & 3x_3 & = & -12 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det = -24$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & 0 & 2 \\ -12 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det = -12$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det = 12$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det = -72 = -3 \cdot 24$$

$$x_1 = \frac{-12}{-24} = \frac{1}{2} \qquad x_3 = \frac{-72}{-24} = 3$$

$$x_2 = \frac{12}{-24} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{matrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{matrix} \quad \left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

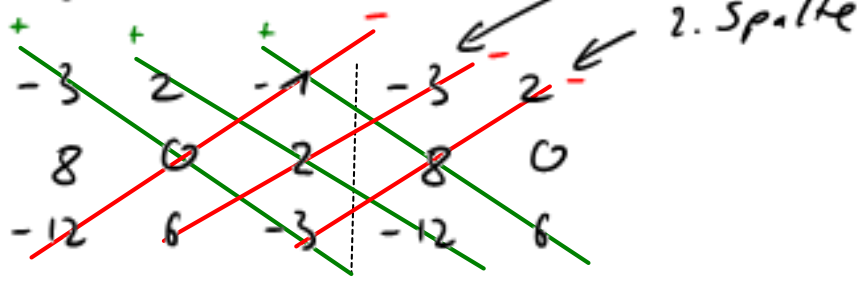
$2+6\left(-\tfrac{1}{3}\right)$ $\qquad$ $-1+(-3)\left(-\tfrac{1}{3}\right)$

$$B \quad \begin{matrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{0} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{6} & \overset{+}{-3} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \det: \; +2\,\overbrace{\left(0\cdot(-3)-6\cdot 2\right)}^{|B_{11}|} - 0\,|B_{12}| + 0\,|B_{13}|$$

$$= 2\cdot(-6)\cdot 2 = -24 \neq 0$$

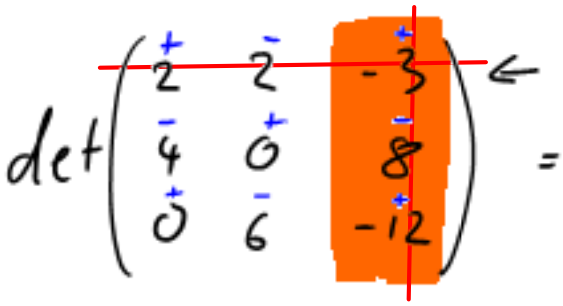
Regel von Sarrus



$$\det = + \underbrace{-3 \cdot 0 \cdot (-3)}_{0} + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot (-12)}_{-48} + \underbrace{(-1) \cdot 8 \cdot 6}_{-48}$$

$$- \underbrace{-12 \cdot 0 \cdot (-1)}_{0} - \underbrace{6 \cdot 2 \cdot (-3)}_{36} - \underbrace{-3 \cdot 8 \cdot 2}_{48}$$

$$= -48 - 48 + 36 + 48 = -12$$



$$= +2\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(0\cdot(-12) - 8\cdot 6\right) - 2\left(4\cdot(-12) - 8\cdot 0\right) - 3\left(4\cdot 6 - 0\cdot 0\right)$$

$$= 2(-48) \quad -2(-48) \quad -3(24) = -72$$

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot(-3)\left|\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right| \quad \downarrow (-1)$$

(verändert die Determinante nicht)

$$= -6\left|\begin{matrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}\right| = -6\left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right| \leftarrow$$

Transponierte

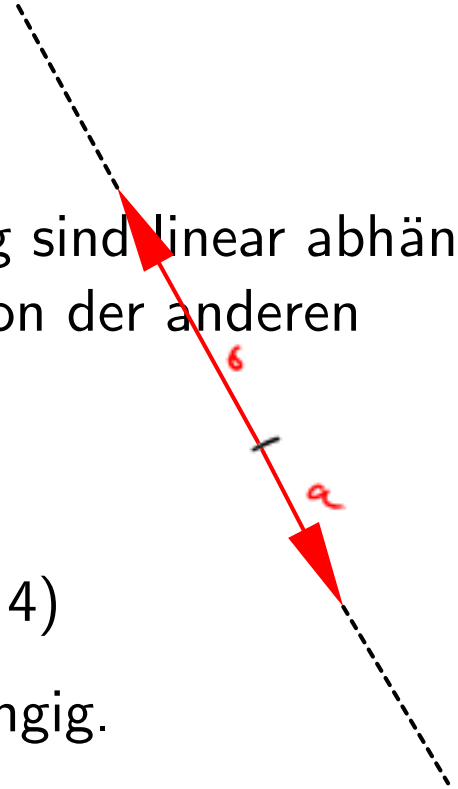
Entwicklung nach Cofaktoren

$$\det = -6\left(+2\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0\right) = -12\left(\underline{7\cdot 1} - \underline{4\cdot 2}\right)$$

$$= -12(7-8) = 12$$



Lineare Abhängigkeit von Vektoren



Eine Gruppe von Vektoren gleicher Ordnung sind linear abhängig, falls einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Beispiele

$$\mathbf{a} = (1, -2),\ \mathbf{b} = (-2, 4)$$

Wegen $\mathbf{b} = -2 \cdot \mathbf{a}$ sind **a** und **b** linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^2$ liegen **a** und **b** auf einer Geraden durch den Ursprung.

$$\mathbf{c} = (1, -2, 3),\ \mathbf{d} = (-2, 4, -2),\ \mathbf{e} = (-1, 2, 1)$$

1+(-2)

-2+4

Wegen $\mathbf{e} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ sind **c, d** & **e** linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^3$ liegen **c, d** & **e** auf einer Ebene.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

Linearkombination von $\{a_1, \ldots, a_n\}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Rightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

$\mathbf{0}$: Nullvektor

In Matrix-Schreibweise bedeutet dies für die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ und den Vektor $\mathbf{x}$:

homogenes Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es gibt nur eine Lsg, falls $|A| \neq 0$

oder äquivalent (Kontraposition):

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$$

Bemerkungen zu linearer Unabhängigkeit

Nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

- Lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass sich **kein** $\mathbf{a}_j$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ darstellen lässt.
- Andernfalls kann z.B. im Fall $x_1 \neq 0$ der Vektor $\mathbf{a}_1$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_j$'s dargestellt werden:

Gewicht von $\mathbf{a}_j$:

$$x_1\mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^{n} x_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = -\sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{x_1}\mathbf{a}_j. \qquad -\frac{x_j}{x_1}$$

- Es können höchstens n Vektoren $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sein. Beispielsweise sind die n Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Beispiel

$\frac{1}{2}a = b$

Linear abhängig!

Sind die Spaltenvektoren der Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a b

linear unabhängig?

$Px = 0$

$4x_1 + 2x_2 = 0$

$2x_1 + x_2 = 0$

Lsg:

$x_1 = -\frac{1}{2}t$

$x_2 = t$

Die Lsg ist nicht eindeutig

$\rightarrow \binom{4}{2}$ & $\binom{2}{1}$ nicht lin. unabh.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \quad \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad |:4$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$

Wie lautet die Determinante $|\mathbf{P}|$?

$|P| = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0 \rightsquigarrow \binom{4}{2}, \binom{2}{1}$ lin. abhängig

Noch ein Beispiel

Welche Bedingung muss an $a, c, d, e, f, h \neq 0$ gestellt werden, damit die Spaltenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $c \cdot d = af$ ⇒ Spalten abhängig

Falls $c \cdot d \neq af$ ⇒ Spalten unabhängig

linear unabhängig sind?

3. Zeile von $Ax = 0$:

$0x_1 + hx_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad h \cdot x_2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_2 = 0$

falls $x_1, x_3 \neq 0$: lsg möglich. falls

$-\frac{c}{a} = -\frac{f}{d} \quad | \cdot a \cdot d \cdot (-1) \Leftrightarrow cd = af$

1. Zeile:

$ax_1 + cx_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad ax_1 = -cx_3 \quad | : a$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = -\frac{c}{a} x_3}$

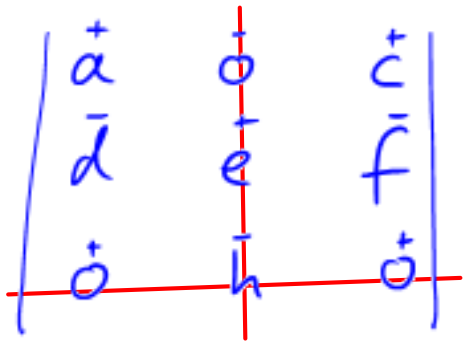
2. Zeile:

$dx_1 + e \cdot \overbrace{x_2}^{=0} + fx_3 = 0$

$\Leftrightarrow dx_1 + fx_3 = 0$

$\Leftrightarrow dx_1 = -fx_3 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{f}{d} x_3}$

Wie lauted $|\mathbf{A}|$?



$$= +\,0 \;-\; h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + 0$$

$$= -\,h\,(af - dc)$$

$\mathrm{Det} = 0$, falls $af = dc$

$\neq 0$, falls $af \neq dc$

Rang einer Matrix

Sei **A** eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Der **Spaltenrang** von **A** ist die größte Anzahl linear unabhängiger Spalten von **A**.

Der **Zeilenrang** von **A** ist die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen von **A**.

Der Spaltenrang von **A** entspricht immer dem Zeilenrang von **A**.

Wir nennen beides daher nur **Rang** der Matrix **A**, $rk(\mathbf{A})$.

Bestimmung des Rangs einer Matrix

1. Möglichkeit:

Man erkennt leicht, ob die Zeilen / Spalten einer Matrix linear unabhängig sind oder nicht.

Ist eine Zeile/Spalte als Linearkombination der anderen Zeilen/Spalten darstellbar, entfernt man diese und untersucht die übrigen Zeilen / Spalten der Matrix.

2. Möglichkeit:

Man bringt die Matrix in die Treppenstufenform und zählt die Stufen.

Rang: Beispiele

Wie lauten die Ränge der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ?$$

$\det(A) = 2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1$

$= 6 + 6 = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

$rg(A) = 2$

$\det(C) = 4 \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 4 (2 \cdot 3 - (-6) 1)$

$= 4 (6 + 6) = 48 \neq 0$

$\Rightarrow rg(C) = 3$

$$\begin{matrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{matrix} \quad (-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{matrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \end{matrix}$$

2 Stufen

$\Rightarrow rg(B) = 2$

$$\begin{matrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \quad \Big\downarrow \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$* \quad 0 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-4)$$

$$= 0 + \tfrac{4}{2} = 2$$

$$\begin{matrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 6 & 2^{*} \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

3 Stufen

$\Rightarrow$ rk $= 3$

Basis von $\mathbb{R}^n$

Eine **Basis** von $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge von Vektoren, mit der jeder Vektor aus $\mathbb{R}^n$ eindeutig als Linearkombination dieser Vektoren gebildet werden kann.

Beispiel

Die Vektoren $\mathbf{e}_1 = \binom{1}{0}$ und $\mathbf{e}_2 = \binom{0}{1}$ sind eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Der Vektor $\binom{3}{-2} \in \mathbb{R}^2$ kann eindeutig als Linearkombination von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies gilt auch allgemein für $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

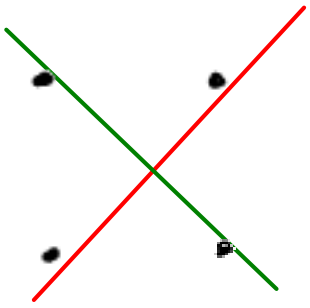
Ist $\binom{3}{-2}$ und $\binom{1}{0}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\lambda_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

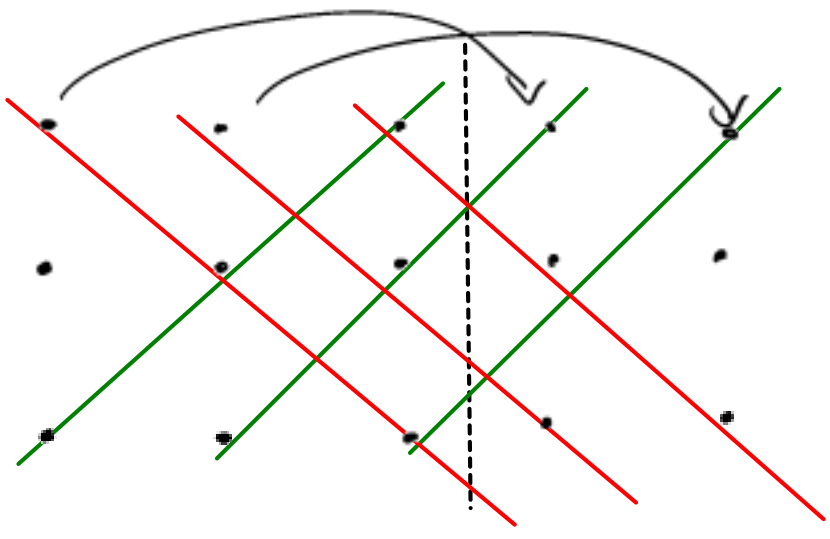
Regel von Cramer

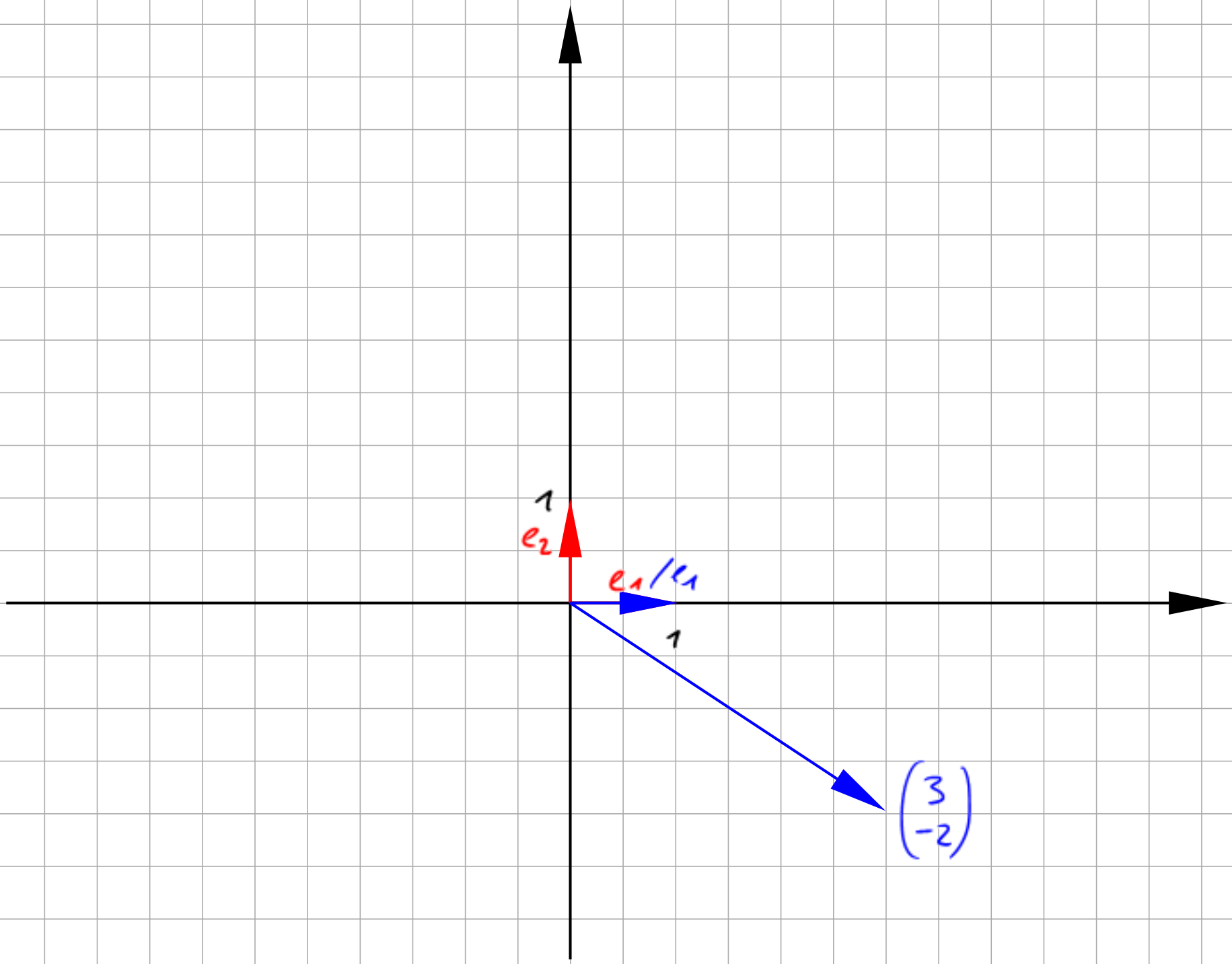
$$\begin{vmatrix}3&1\\-2&0\end{vmatrix} = 3\cdot 0-(-2)\cdot 1 = 2\neq 0 \Rightarrow \text{es gibt ein eindeutiges } \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}, \text{ sodass } \begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Determinanten für $n = 2$



Determinanten für $n = 3$



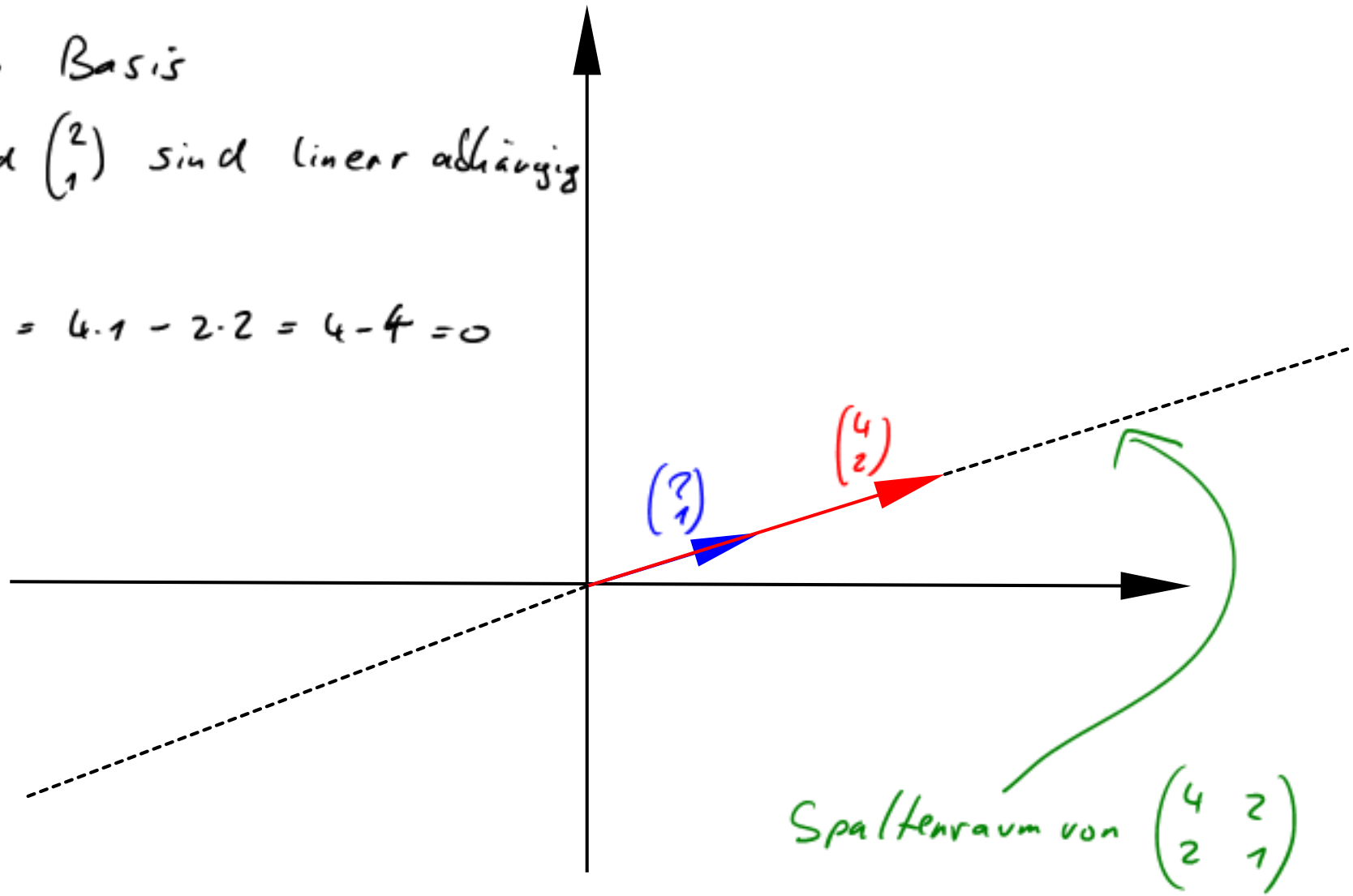

1
e_2
e_1 / ℓ_1
1
$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ist $\binom{4}{2}$ und $\binom{2}{1}$ eine Basis für $\mathbb{R}^2$?

keine Basis

$\binom{4}{2}$ und $\binom{2}{1}$ sind linear abhängig

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$



Spaltenraum einer Matrix

Der Spaltenraum $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ einer $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ sind alle Linearkombinationen, welche durch die Spalten von $\mathbf{A}$ gebildet werden können:

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$$

Beispiele:

- $\mathcal{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{R}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{R}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{R}^2$

Basis von $\mathbb{R}^n$

Definition

Die Spalten einer Matrix $\mathbf{A}$ sind eine **Basis** des $\mathbb{R}^n$, falls:

- Die Spalten von $\mathbf{A}$ spannen $\mathbb{R}^n$ auf, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.
- Dies gilt nicht, falls eine beliebige Spalte von $\mathbf{A}$ entfernt wird.

Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ wird auch als Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ interpretiert.

Satz:

Für eine $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.
- $|\mathbf{A}| \neq 0$
- $rk(\mathbf{A}) = n$

13.6 Die Inverse einer Matrix

Für eine gegebene Matrix **A** ist die Matrix **X** eine **Inverse** von **A**, wenn gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \text{ und } \mathbf{XA} = \mathbf{I}$$

Die Matrix **A** heißt dann **invertierbar**, die Inverse heißt $\mathbf{A}^{-1}$.

Bemerkung:

AX und **XA** sind nur dann definiert, wenn **A** und **X** quadratisch und derselben Ordnung sind.

Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

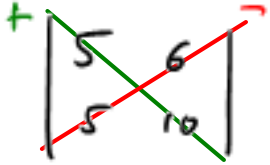
Beispiel 13.6.1

Berechne für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenprodukte **AB** und **BA**.

Wie lautet die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$?



$= 5 \cdot 10 - 5 \cdot 6 = 50 - 30 = 20$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 10 + 6\cdot(-5) & 5\cdot(-6) + 6\cdot 5 \\ 5\cdot 10 + 10(-5) & 5\cdot(-6) + 10\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 50 & -30 \\ 50 & -50 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -30 + 30 \\ -30 + 50 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = 20\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von A ist

also $\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

$? = |A|$

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix: Beispiel

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ?$$

$$|A| = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-6) = 6 + 6 = 12 \neq 0 \checkmark$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist!

Eigenschaften der Inversen

a) $(A')' = A$

b) $(AB)' = B' \cdot A'$

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen. Dann gilt:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

c) $\mathbf{A}'$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

e) Die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist eindeutig.

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

Wir können die Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit der Cramer'schen Regel eindeutig bestimmen, falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Wenn die inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existiert, gilt:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Die Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist also eindeutig definiert, falls $|\mathbf{A}| \neq 0$ oder falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

Gibt es hier einen tieferen Zusammenhang?

Basis, Determinante, lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

Für eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
- Die Determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$
- Alle Spalten bzw. Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.
- Der Rang $rk(\mathbf{A}) = n$
- Die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.7 Allgemeine Formel für die Inverse

Es sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix und es bezeichne $adj(\mathbf{A})$ die **Adjunkte** von $\mathbf{A}$, wobei

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} (-1)^2|\mathbf{A}_{11}| & \dots & (-1)^{k+1}|\mathbf{A}_{k1}| & \dots & (-1)^{n+1}|\mathbf{A}_{n1}| \\ (-1)^3|\mathbf{A}_{12}| & \dots & (-1)^{k+2}|\mathbf{A}_{k2}| & \dots & (-1)^{n+2}|\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|\mathbf{A}_{1n}| & \dots & (-1)^{k+n}|\mathbf{A}_{kn}| & \dots & (-1)^{n+n}|\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ eindeutig bestimmt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot adj(\mathbf{A}) \ .$$

nicht für die Klausur!

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = ad - bc$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse: Berechnung durch elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformung:

Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ (und Addieren des Resultats zu einer Zeile).

Vertauschen von Zeilen

- Eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ mit $|\mathbf{A}| \neq 0$ wird durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umgeformt.
- Die identischen Zeilenumformungen werden auf die Einheitsmatrix angewendet.
- Das Ergebnis ist dann die Inverse von $\mathbf{A}$.

Beispiel

$|A| = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6 \neq 0$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (-3)$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad |:(-6)$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (-2)$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (ctd.)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ ✓

Anwendung der gleichen Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix ergibt die Inverse!

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (-3)

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$ $\cdot(-6)$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$ (-2)

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Probe

Berechne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

Lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

A: Koeffizientenmatrix der Ordnung $m \times n$
A|**b**: erweiterte Koeffizientenmatrix

- Das System ist **lösbar**, falls **b** als Linearkombination der Spalten von **A** darstellbar ist. Dies ist der Fall, wenn $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

  Genau eine Lösung, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$.[2]

  Unendlich viele Lösungen, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$.

- **Keine Lösung**, falls $rk(\mathbf{A}) < rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

[2] (Nur) in diesem Fall gilt $|\mathbf{A}| \neq 0$ und $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Homogene Gleichungssysteme

Wenn auf der rechten Seite eines linearen Gleichungssystems nur Nullen stehen, nennen wir das System **homogen**:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Ein homogenes Gleichungssystem hat immer eine Lösung: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Diese Lösung nennen wir die triviale Lösung.

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, so ist dies die einzige Lösung.

Falls $|\mathbf{A}| = 0$, so hat das System (unendlich viele) nichttriviale Lösungen.

Beispiel 13.8.2

Bestimme die Werte von λ, für die das folgende Gleichungssystem nichttriviale Lösungen hat:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & 2y & + & z & = & \lambda x \\ 2x & + & y & & & = & \lambda y \\ x & & & + & z & = & \lambda z \end{array}$$

Wir überspringen (leider) folgende Unterkapitel:

~~**13.9 Das Leontief-Modell**~~

~~**13.10 Eigenwerte und Eigenvektoren**~~

~~**13.11 Diagonalisierung**~~

13.12 Quadratische Form

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Zeilenvektor ↗ ↖ Spaltenvektor

Für $n = 2$:

$$Q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1^1 x_2^1 + a_{22}x_2^2$$

Summe der Exponenten = 2

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$$

$$= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Beispiel 13.12.1

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Berechne für folgende quadratische Formen eine Matrix $\mathbf{A}_i$, sodass gilt $Q_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}_i\mathbf{x}$:

- $Q_1 = x_1^2 + x_2^2$ $\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $Q_2 = -x_1^2 - x_2^2$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $Q_3 = (x_1 - x_2)^2$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $Q_4 = -(x_1 - x_2)^2$ $\quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $Q_5 = 1x_1^2 - x_2^2$ $\quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$Q_3 = (x_1 - x_2)^2 = 1\cdot x_1^2 - 2x_1x_2 + 1\cdot x_2^2$$

Definitheit von Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt

- **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **indefinit**, falls $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:
$\mathbf{A}$ ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel 13.12.1

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bestimme für die Matrizen $\mathbf{A}_i$ folgender quadratischer Formen deren Definitheit:

- $Q_1 = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$ $= 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow A_1$ pos. definit.
- $Q_2 = -x_1^2 - x_2^2 \leq 0$ $= 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow A_2$ neg. definit
- $Q_3 = (x_1 - x_2)^2$ $x_2 > x_1 \Rightarrow Q_3 > 0$ $x_1 > x_2 \Rightarrow Q_3 > 0$
  $x_2 = x_1 \Rightarrow Q_3 = 0$ A_3 pos. semidefinit
- $Q_4 = -(x_1 - x_2)^2$
  A_4 neg. semidefinit
- $Q_5 = x_1^2 - x_2^2$

$Q_5(1,0) = 1^2 - 0^2 = 1 > 0$

$Q_5(0,1) = 0^2 - 1^2 = -1 < 0$

$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ indefinit

Beispiel

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + (a_{12}+a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Ist die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |P| = 4\cdot 1 - 2\cdot 2 = 4-4 = 0$$

$p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$

(semi)definit?

$$x'Px = 4x_1^2 + (2+2)x_1x_2 + 1\cdot x_2^2 = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (2x_1)^2 + 2(2x_1)\cdot x_2 + x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

für alle x_1, x_2

$$= 0 \iff 2x_1 + x_2 = 0$$

z.B. für $\underbrace{x_1 = 1,\ x_2 = -2}_{\neq (0,0)} \Rightarrow x'Px = 0$

$\Rightarrow$ P ist positiv semidefinit

Definitheit von 2×2-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0, a_{22} \leq 0$ und $|\mathbf{A}| \geq 0$

$|A| < 0 \Rightarrow$ A indefinit.

Definitheit von 3×3-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- (positiv semidefinit)

- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| < 0$
- (negativ semidefinit)

Zusammenfassung

- Determinante einer Matrix – der Ordnung 2, 3 und n
- lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Rang einer Matrix
- Basis von $\mathbb{R}^n$
- Inverse Matrizen
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- Definitheit von Matrizen