Übung 1 Spieltheorie

23.10.26

b) Nutzenzahlen

A leugnen, leugnen ⇝ (1 Mon., 1 Mon)
$u_1(A) = 3$ $u_2(A) = 3$

B leugnen, gestehen ⇝ (9 Mon, 0 Mon)
$u_1(B) = 4$ $u_2(B) = 1$

C gestehen, leugnen ⇝ (0 Mon, 9 Mon)
$u_1(C) = 1$ $u_2(C) = 4$

D gestehen, gestehen ⇝ (6 Mon., 6 Mon)
$u_1(D) = 2$ $u_2(D) = 2$

(leugnen, leugnen) ist hier ein Gleichgewicht in dominanten Strategien.

a) Vorschlag für Präferenzen

Romeo (1) & Julia (2)

$B \succeq_1 A \succeq_1 D \succeq_1 C$

$C \succeq_2 A \succeq_2 D \succeq_2 B$

(2)

(1)

	leugnen	gestehen
leugnen	A, ** : 3, 3	B, ** : 4, 1
gestehen	C, ** : 1, 4	D : 2, 2

gestehen ist dominiert durch leugnen

Wieviele rationale Präferenzordnungen gibt es für A B C D

$A \succ B \succ C \succ D$

$A \succ B \succ D \succ C$

$A \succ C \succ B \succ D$

$A \succ C \succ D \succ B$

⋮

$D \succ C \succ B \succ A$

"4 Fakultät"

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$+ \quad 36$

$+ \quad 8$

$+ \quad 1$

69

2 Indifferenzzeichen:

2 Alternativen

→ 2 Reihenfolgen } 4 Tripel

4.2 Pr. Ordnungen mit 2 I-Zeichen

$A \succ B \succ C \sim D$

$A \succ C \sim D \succ B$

$C \sim D \succ A \succ B$

$B \succ A \succ C \sim D$

$B \succ C \sim D \succ A$

$C \sim D \succ B \succ A$

} 6 = 3!

6 Paare : ~ 36 ~ 6·6 Präferenzordnungen mit 1 Indifferenzzeichen

Aufgabe 2

Spieler 1

a) Miles hat intransitive Präferenzen:

b) neue Präferenzen:



→ Miles könnte keine Entscheidung treffen

Seine Präferenzen sind nicht rational.

$\succ_1$:
Miles: 4 Linsen Dal ≻ 3 Lauchquiche ≻ 2 Lasagne ≻ 1 kalte Küche

Esther: 4 Lauch ≻ 3 Linsen ≻ 2 Lasagne ≻ 1 kalte Küche

Auszahlungsmatrix

Miles \ Esther	Las (2)	Lin (2)	Lau (2)
Las (1)	2,2 *	1,1	1,1 *
Lin (1)	1,1	3,3 **	1,1
Lau (1)	1,1	1,1	3,4 ** *

Nash Gleichgewicht

beste Antwort

Pareto effizient

c) ja, sie können sich im NGG auf kalte Küche einigen, falls z.B. kalte Küche bei beiden auf Platz 1 ist (Diät)

d) ja, sie können sich auf eines der drei Gerichte einigen.

Aufgabe 3

(2)

(1)

	links	rechts
oben	a, b	c, d
unten	e, f	g, h

a) oben dominant

strikt: $a > e$, $c > g$

schwach: $a \geq e$, $c \geq g$

& eine Ungl. strikt!

links dominant

strikt: $b > d$, $f > h$

schwach: $b \geq d$, $f \geq h$

& eine Ungl. strikt!

b) (oben, links) NGG

oben beste Antwort auf links

$a \geq e$

links beste Antwort auf oben

$b \geq d$

Aufgabe 4 $\quad u_i(s_1,s_2,s_3,s_4) = 4\sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4} - s_i$

a) Beste Antwort: $\quad s_{-i} = (s_j, s_k, s_l)$

$\max_{s_i \geq 0} \; 4\sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4} - s_i$

BEO $\quad 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4}} - 1 \leq 0 \quad (=0 \text{ falls } s_i > 0)$

$\Leftrightarrow \; 2\frac{1}{\sqrt{\dots}} \leq 1$

$\Leftrightarrow \; 2 \leq \sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4}$

$\Rightarrow \; 4 \leq s_1+s_2+s_3+s_4$

$\rightarrow \; s_i \geq 4 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} s_j$

beste Antwort von i:

$$s_i^*(s_{-i}) = \begin{cases} 4 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} s_j, \text{ falls } * \geq 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

b) Nash Gleichgewichte

$s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0 \qquad s_1+s_2+s_3+s_4 \geq 4 > 0 \quad$ mind 1 s_i ist positiv

Für mind 1 Spieler gilt $s_1+s_2+s_3+s_4 = 4$

Menge aller NGGs: $\{(s_1,s_2,s_3,s_4) \in \mathbb{R}^4 \mid s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0, s_1+s_2+s_3+s_4 = 4\}$

zB $s_i = 1, \; i = 1,2,3,4$

$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} s_j = 3 \quad BEO_i: \; 4 \leq 3 + s_i \; (= \text{falls } s_i > 0)$

$1 \leq s_i \Rightarrow s_i = 1$

zB $s_1 = s_2 = s_3 = 0, \; s_4 = 4$

$BEO_1: \; 4 \leq s_1 + 0 + 0 + 4 \Leftrightarrow 0 \leq s_1 \Rightarrow s_1 \geq 0$

$BEO_4: \; 4 \leq 0 + 0 + 0 + s_4 \Rightarrow s_4 = 4$

c)

$$\max_{s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0} \sum_{i=1}^{4} \underbrace{4\sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4}}_{\text{unabhängig von } i} - s_i$$

$$\max_{s_1,s_2,s_3,s_4 \geq 0} 16\underbrace{\sqrt{s_1+s_2+s_3+s_4}}_{x} - \underbrace{(s_1+s_2+s_3+s_4)}_{x}$$

$$\max_{x \geq 0} 16\sqrt{x} - x$$

$$\max_{x \geq 0} \quad 16\sqrt{x} - x$$

BEO $\quad 16 \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \leq 0 \qquad (= 0 \text{ falls } x > 0)$

$$\Leftrightarrow \quad 8 \leq \sqrt{x} \qquad \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \; =$$

$$\Leftrightarrow \quad 8 = \sqrt{x} \quad \Rightarrow x = 64$$

$\sum_{i=1}^{4} U_i$ maximal, falls $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 64$

d) NNG pareto effizient?

Antwort: nein

Alternative Pareto Verbesserungen:

$s^{**} \in \mathbb{R}^4_{\geq 0}$ $\sum s_i^{**} = 64$, $s_i^{**} \leq 24$ $i = 1, \dots, 4$

NGG: $s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^* = 4$

$$u_i(s_1^*, s_2^*, s_3^*, s_4^*) = 4\underbrace{\sqrt{s_1^* + s_2^* + s_3^* + s_4^*}}_{=4} - s_i^* = 8 - s_i^* \leq 8$$

$s_1^{**} + s_2^{**} + s_3^{**} + s_4^{**} = 64$, zB $s_i^{**} = 16$

$$u_i(s^{**}) = 4\underbrace{\sqrt{64}}_{8} - s_i^{**} = 32 - s_i^{**} \rightarrow = 16 > 8 \geq u_i(s^*)$$

beliebiges NGG

Pareto Verbesserung: $s^* \rightsquigarrow s^{**}$

zB.: $s_i^{**} = 16$ $i = 1, \dots, 4$

e) $s^{**} : \sum_{i=1}^{4} s_i^{**} = 64 \overset{?}{\Longrightarrow} s^{**}$ Pareto effizient ✓

$$\sum_{i=1}^{4} u_i(s^{**}) \geq \sum_{i=1}^{4} u_i(\tilde{s}) \quad \text{für alle } \tilde{s} \in \mathbb{R}^4_{\geq} \qquad (*)$$

Nehme an, s^{**} wäre nicht pareto effizient.

Dann würde es eine Pareto Verbesserung geben: $\tilde{s}$

für alle i

$u_i(\tilde{s}) \geq u_i(s^{**})$ (niemand wird durch $\tilde{s}$ schlechter gestellt.)

$u_i(\tilde{s}) > u_i(s^{**})$ für ein i $\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} u_i(\tilde{s}) > \sum_{i=1}^{n} u_i(s^{**})$ ↯ $(*)$

Einschub: Beauty Contest.

$S_i = \{1, 2, \dots, 100\}$ $i = 1, \dots, n$

Durchschnitt: $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$

$$\left| s_i - 66\tfrac{2}{3} \right| = s_i - 66\tfrac{2}{3}$$

$$= \underbrace{s_i - 67}_{>0} + \underbrace{67 - 66\tfrac{2}{3}}_{\frac{1}{3}}$$

$s_i'' = 67$ dominiert alle $s_i' > 67$ strikt.

Gewonnen hat i, falls $\left| s_i - \frac{2}{3}\bar{s} \right| \leq \left| s_j - \frac{2}{3}\bar{s} \right|$ für alle $j = 1, \dots, n$

Gibt es strikt dominierte Strategien?

$s_i \leq 100 \quad \forall i \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i \leq 100 \Rightarrow \frac{2}{3}\bar{s} \leq \frac{2}{3} \cdot 100 = 66\tfrac{2}{3}$

$$\underbrace{\left| 67 - 66\tfrac{2}{3} \right|}_{\frac{1}{3}} < \left| s_i - 66\tfrac{2}{3} \right| \quad \text{für alle } s_i > 67$$

$s_i > 67$ strikt dominiert $\Rightarrow$ $\bar{s} \leq 67$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{3}\bar{s} \leq \frac{2}{3}67 = 44\frac{2}{3}$

$|45 - 44\frac{1}{3}| < |s_i - 44\frac{1}{3}|$ für alle $s_i > 45$

$\Rightarrow$ $s_i : 45 < s_i \leq 67$ iteriert strikt dominiert.

... usw ...

Der Iterationsprozess endet bei $s_i = 1$:

$\Rightarrow \bar{s} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}\bar{s} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $s_i^* = (1, 1, \dots, 1)$ ist NGG

Angenommen $s_2 = s_3 = \dots = s_n = 1$

$$\frac{2}{3}\bar{s} = \frac{2}{3} \cdot s_1 \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\left| s_1 - \frac{2}{3}\bar{s} \right| = s_1 - \frac{2}{3}\bar{s}$$

$s_1 = 1$:

$$\left| 1 - \frac{2}{3} 1 \right| = \frac{1}{3}$$

$$= s_1 - \frac{2}{3} s_1 \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3n-2}{3n} s_1 > \frac{1}{3} + \frac{n-1}{n} \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3n}$$

$$\Leftrightarrow (3n-2) s_1 > 3n - 2$$

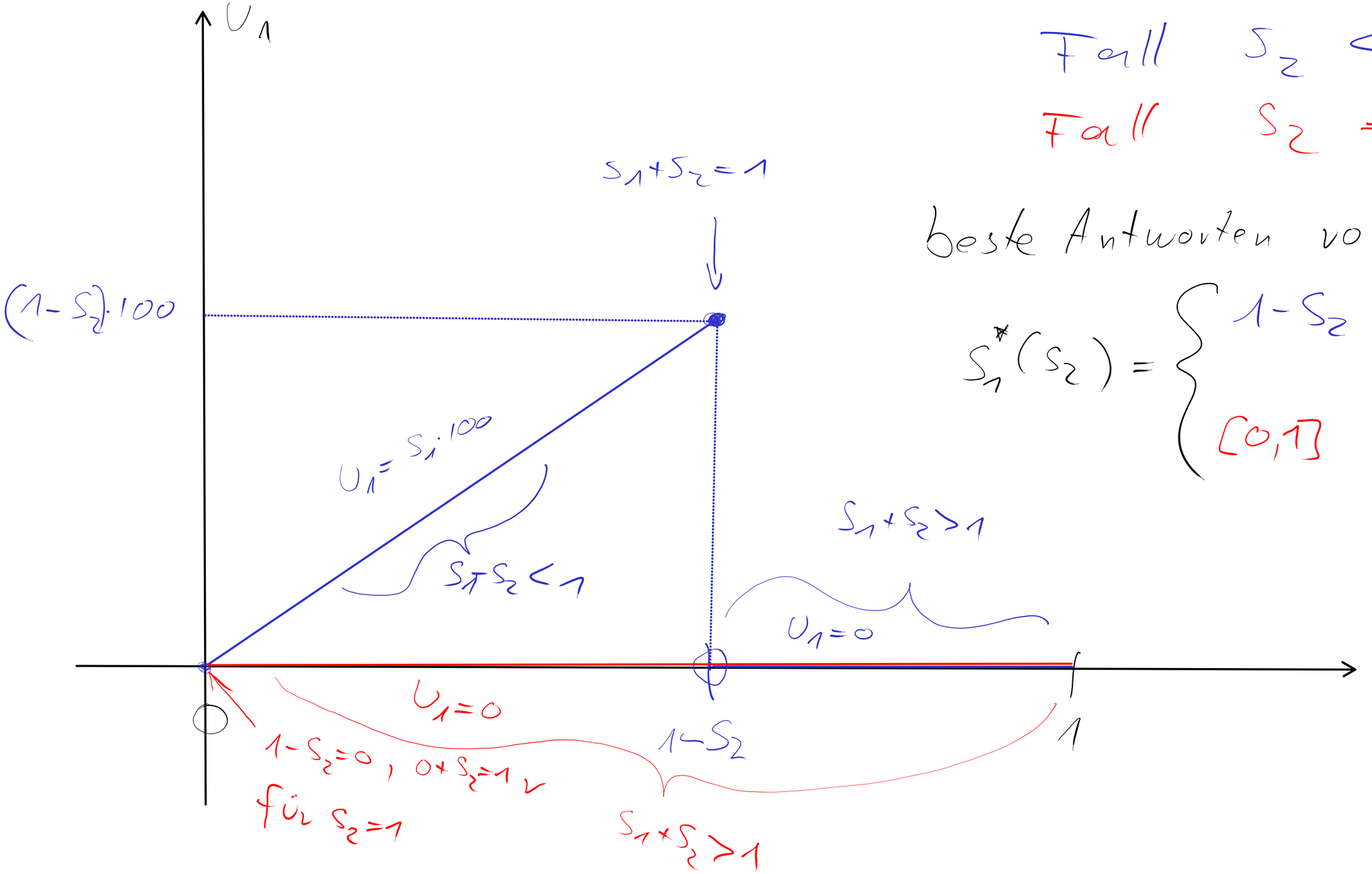
$$\Leftrightarrow s_1 > 1 \quad \checkmark$$

Aufgabe 5

$S_i = [0, 1] \quad i = 1, 2$

$$U_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1 \cdot 100 & \text{falls } s_1 + s_2 \leq 1 \\ 0 & \text{falls } s_1 + s_2 > 1 \end{cases}$$

$$U_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2 \cdot 100 & \text{falls } s_1 + s_2 \geq 1 \\ 0 & \text{falls } s_1 + s_2 < 1 \end{cases}$$

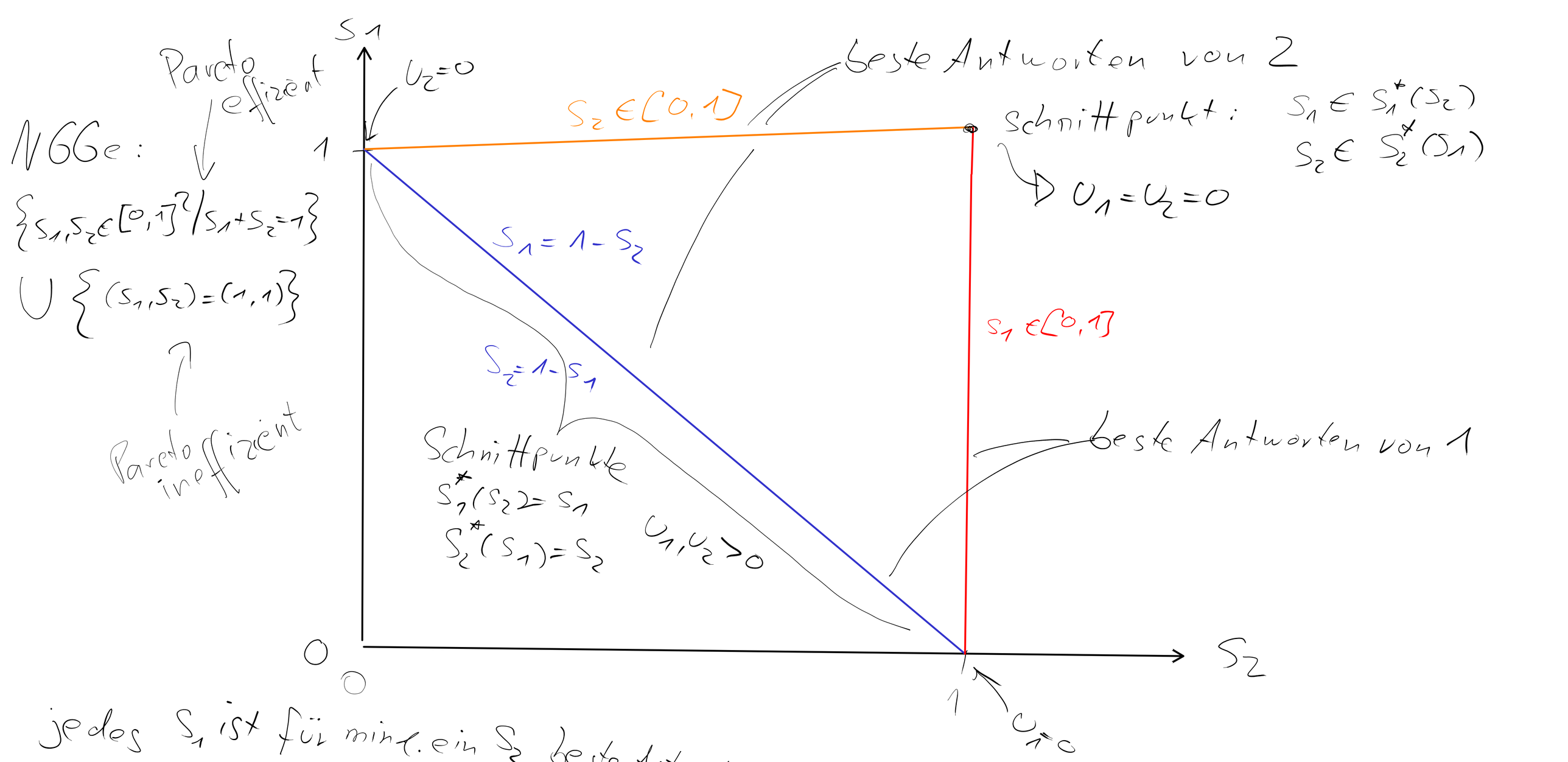


Fall $s_2 < 1$

Fall $s_2 = 1$

beste Antworten von 1:

$$s_1^*(s_2) = \begin{cases} 1-s_2 & \text{falls } s_2<1 \\ [0,1] & \text{falls } s_2=1 \end{cases}$$



jedes s_1 ist für mind. ein s_2 beste Antwort

daher kann s_1 nicht strikt dominiert sein.

6

	l	r
o	a, b	c, d
u	e, f	g, h

falsch

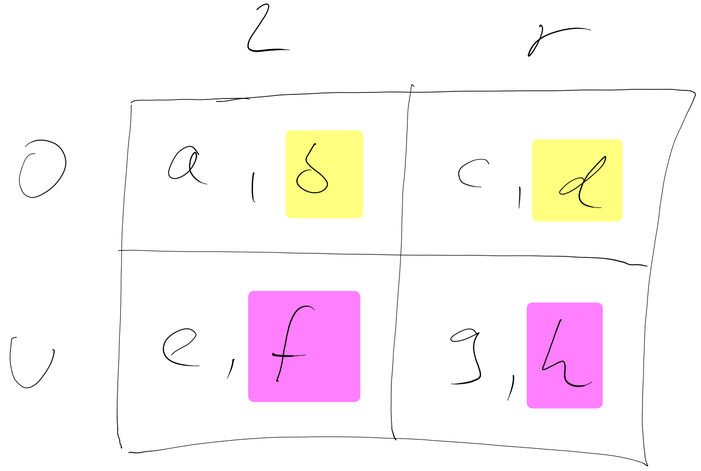
a) (s_1, s_2) NGG $\Longrightarrow$ (s_1, s_2) strikt dominante Strategien.

eldorado-Olive

*3,2	0,0
0,0	2,3 *

keine dom. Strategie

b) (s_1, s_2) dom. Strat ✓ $\Rightarrow$ (s_1, s_2) NGG



o strikt dominant: $a > e$, $c > g$

u strikt dominant: $b > d$, $f > h$

(o, u) NGG $\quad a \geq e, b \geq d$ ✓

c) Spiel ohne NGG in reinen Strategien kann eine strikt dominante Strategie haben

	l	r
O	a, b	c, d
U	e, f	g, h

Umkehrung

Elfmeterspiel

	L	R
L	1, -1	-1, 1
R	-1, 1	1, -1

T

O str. dom.

a > e

c > g

Fall b ≥ d

⇒ O,L NGG

Fall b < d

O,r NGG

→ Ein Spiel mit einer strikt dominanten Strategie hat ein NGG in reinen Strategien.

d) jede Spielerin kann höchstens 1 str. dom. Str. haben.

	l	r
o	a, b	c, d
u	e, f	g, h

Eine strikt dominante Strategie dominiert jede andere Strategie strikt, es kann also keine andere strikt dominante Strategie geben.

e) höchstens ein GGw in strikt. dominanten Strategien

folgt aus d)

f) eine str. dom. Strategie ist die eindeutige beste Antwort auf jede Strategie des/der anderen.

$\Rightarrow$ Ein Wechsel ist deswegen nicht sinnvoll.

g) wahr

	L	R
O	10, 10 *	2, 8
U	8, 2	5, 5 *

7

a)

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
s_2	81,19	20,80	20,80	20,80	20,80
s_3	81,19	49,51	40,60*	40,60	40,60
s_4	81,19	49,51	25,75	60,40	60,40
s_5	81,19	49,51	25,75	9,91	80,20
s_6	81,19	49,51	25,75	9,91	1,99

$\rightsquigarrow (s_3, t_3)$ NGG

b)

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
~~s_1~~	~~0,100~~	~~0,100~~	~~0,100~~	~~0,100~~	~~0,100~~
~~s_2~~	81,19	~~20,80~~	~~20,80~~	~~20,80~~	~~20,80~~
s_3	81,19	49,51	40,60*	40,60	40,60
s_4	81,19	49,51	25,75	60,40	60,40
s_5	81,19	49,51	25,75	9,91	80,20
~~s_6~~	81,19	49,51	~~25,75~~	~~9,91~~	~~1,99~~

1 3 5 2 4

8

Falls auch schw. dom. Strategien eliminiert worden, können NGGs verloren gehen.

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

m ist schwach dominiert durch unten.

→ r schwach dominiert durch L

→ o ist dominiert durch U → (U,L) bleibt übrig

	l	r
o	5,1	4,0
m	6,0	3,1
u	6,4	4,4

o schw. dom durch u.

L durch r schw. dom

m str. dom. durch u

→ (u,r) bleibt übrig

9 Cournot Oligopol mit $n=3$

$P(Q) = 34 - Q$, $C(q) = 4 \cdot q$

$\Pi_i(q_1, q_2, q_3) = (30 - q_1 - q_2 - q_3) q_i$

dominiert $q_i = 15$ alle $q_i > 15$?

$$\Pi_1(q_1 = 15, q_2, q_3) = (30 - 15 - q_2 - q_3) 15 \overset{?}{>} (30 - q_1 - q_2 - q_3) q_1 \quad \forall q_1 > 15$$

$$\Leftrightarrow (15 - q_2 - q_3) 15 > (30 - q_1 - q_2 - q_3) q_1 \quad | - (15 - q_2 - q_3) q_1$$

$$\Leftrightarrow (15 - q_2 - q_3)(15 - q_1) > (15 - q_1) q_1 \quad | : (15 - q_1) < 0$$

$$(15 - q_2 - q_3)(15 - q_1) > (15 - q_1)\, q_1 \qquad | : (15 - q_1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 - q_2 - q_3 < q_1 \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow$ keine Firma wählt $q_i > 15$.

$$\pi_1\left(\frac{15}{2}, q_2, q_3\right) \overset{2.}{>} \pi_1(q_1, q_2, q_3) \quad \text{für alle} \quad q_1 < \frac{15}{2}, \; q_2, q_3 \leq 15$$

$$\left(30 - \frac{15}{2} - q_2 - q_3\right)\frac{15}{2} > (30 - q_1 - q_2 - q_3)\, q_1$$

$$\left(\frac{45}{2} - q_2 - q_3\right)\frac{15}{2} > (30 - q_1 - q_2 - q_3)\, q_1 \qquad \left| - \left(\frac{45}{2} - q_2 - q_3\right) q_1 \right.$$

$$\left(\frac{45}{2} - q_2 - q_3\right)\frac{15}{2} > (30 - q_1 - q_2 - q_3)q_1 \quad \Big| - \left(\frac{45}{2} - q_2 - q_3\right)q_1$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{45}{2} - q_2 - q_3\right)\left(\frac{15}{2} - q_1\right) > \left(\frac{15}{2} - q_1\right)q_1 \quad \Big| : \left(\frac{15}{2} - q_1\right) > 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{45}{2} - q_2 - q_3 > q_1$$

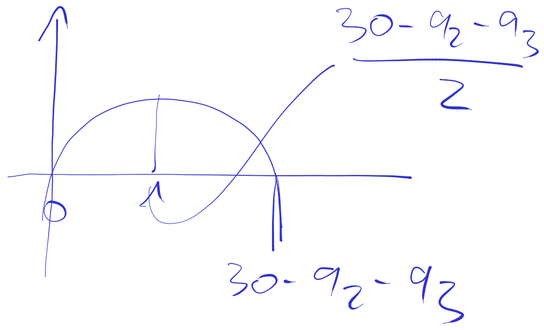
für alle $q_2, q_3 \leq 15$

$q_1 < \frac{15}{2}$

Dies ist verletzt. z.B. durch $q_2 = q_3 = 30$

$-\frac{15}{2} > q_1$ ↯

N66: $\max_{q_1 \geq 0} (30 - q_1 - q_2 - q_3) q_1$



BEO: $-1 q_1 + (30 - q_1 - q_2 - q_3) 1 = 30 - 2q_1 - q_2 - q_3 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } q_1 > 0)$

$\Leftrightarrow \quad 30 - q_2 - q_3 \leq 2 q_1$

$\Leftrightarrow \quad 15 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3) \leq q_1$

Reaktionsfunktion

$$q_1^*(q_2, q_3) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3), & q_2 + q_3 \leq 30 \\ 0, & q_2 + q_3 > 30 \end{cases}$$

$q_i > 15$ strikt dominiert $\Rightarrow$ $q_2 + q_3 \leq 30$

$\Rightarrow$ $q_1 = 15 - \frac{1}{2}(q_2 + q_3) \Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} q_1 = 15 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + q_3)$

$q_2 = 15 - \frac{1}{2}(q_1 + q_3) \Leftrightarrow$ $q_2 = 30 - (q_1 + q_2 + q_3)$

$q_3 = 15 - \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ $q_3 = 30 - (q_1 + q_2 + q_3)$

$\Rightarrow$ Es muss gelten $q_1 = q_2 = q_3 = q^C$

$q^C = 30 - 3q^C \Leftrightarrow 4q^C = 30 \Leftrightarrow q^C = \frac{15}{2}$

Cournot Oligopol mit n Firmen

$$\max_{q_i \geq 0} \left(30 - \sum_{j=1}^{n} q_j\right) q_i$$

BEO: $-1 \cdot q_i + \left(30 - \sum_{j} q_j\right) \cdot 1 \leq 0 \quad (=0 \text{ falls } q_i > 0)$

$$\Leftrightarrow 30 - \sum_{j=1}^{n} q_j \leq q_i$$

Falls $q_i > 0$: $q_i = 30 - \sum_{j=1}^{n} q_j$

$\Rightarrow$ Symmetrie $q^C = 30 - n q^C \Leftrightarrow (n+1) q^C = 30 \Leftrightarrow q^C = \frac{1}{n+1} \cdot 30$

$$q^C = \frac{1}{n+1} \cdot 30$$

$$\sum_{j=1}^{n} q^C = n \frac{1}{n+1} \cdot 30 = \frac{n}{n+1} 30 \xrightarrow[n \to \infty]{} 30 = q^W$$

10 mit $a = 34$, $c = 4$

a) — b) $S_i = \mathbb{N}$

Wie in Vorlesung: $P_j > 19 \rightsquigarrow$ beste Antwort $P_i = 19$

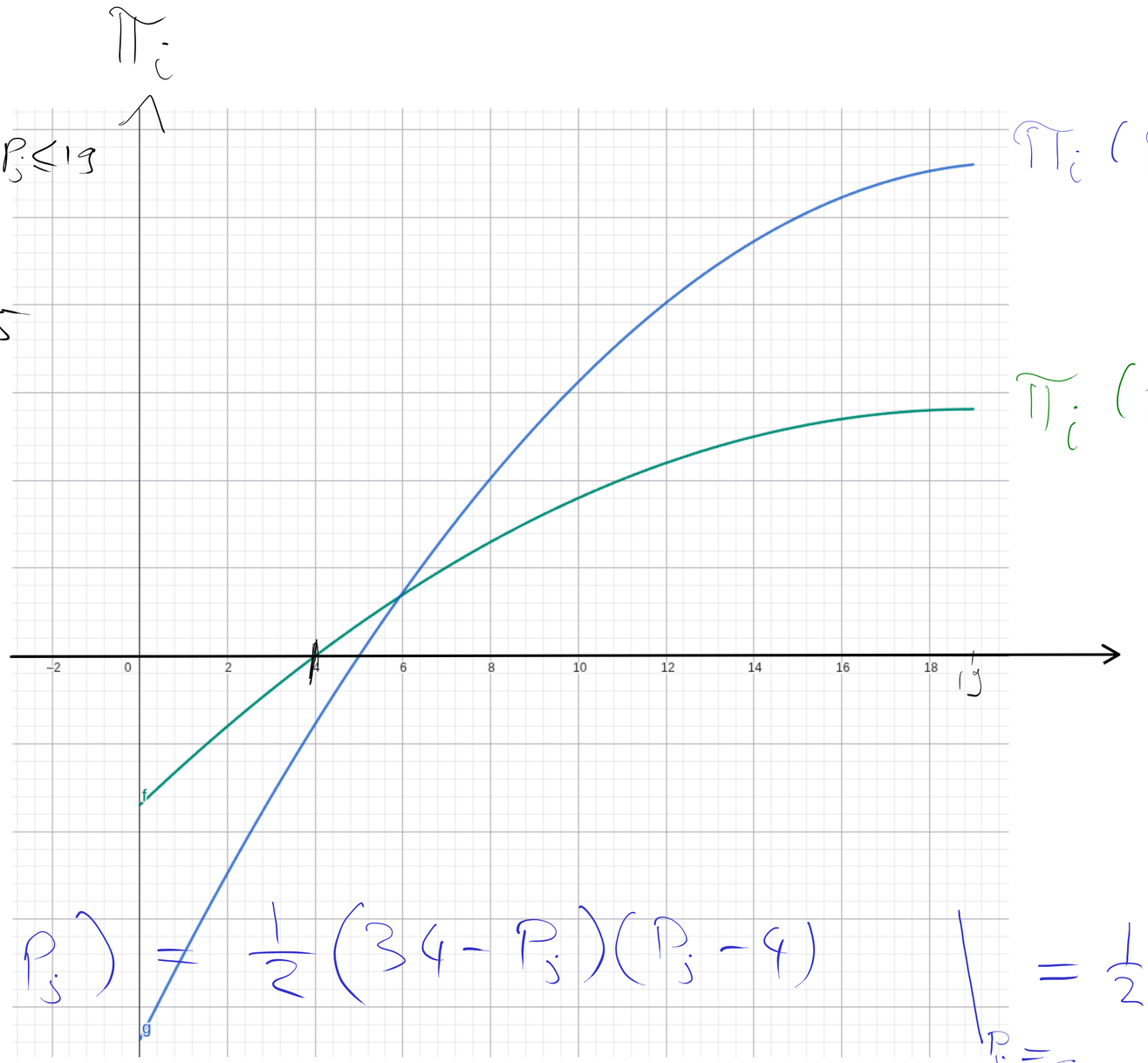
Falls P_j: $4 < P_j \leq 19$

$$\Pi_i(P_i = P_j, P_j) = \frac{1}{2}(34 - P_j)(P_j - 4)$$

$$\Pi_i(P_i = P_j - 1, P_j) = (34 - P_j + 1)(P_j - 1 - 4) = (35 - P_j)(P_j - 5)$$

beste Antwort

$$p_i^*(p_j) = \begin{cases} p_j - 1, \text{ falls } 6 \le p_j \le 19 \\ p_j, \text{ falls } p_j = 5 \end{cases}$$



$$\Pi_i(p_i = p_j, p_j) = \frac{1}{2}(34 - p_j)(p_j - 4) \Big|_{p_j = 5} = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 2 = 28$$

$$\Pi_i(p_i = p_j - 1, p_j) = (35 - p_j)(p_j - 5) \Big|_{p_j = 6} = 29 \cdot 1 = 29$$

$\underline{p_j = 4}$: beste Antworten: $p_i^*(p_j = 4) = \{4, 5, 6 \dots\}$

$p_j < 4$: beste Antworten: $p_i^*(p_j < 4) = \{p_j + 1, p_j + 2, \dots\}$

altes NGG: $p_i^* = p_j^* = 4$

neues NGG: $p_i^* = p_j^* = 5$

#11 Tullock-Contest

Tullock 1988

symmetrische Wertschätzung für den Preis

$v_1 = v_2 = 4$

„Contest-Successfunction": $\psi_{(s_1,s_2)} = \frac{s_1}{s_1+s_2}$, falls $s_1+s_2>0$

$= \frac{1}{2}$, falls $s_1+s_2=0$

$$u_i(s_1,s_2) = \frac{s_i}{s_1+s_2}\cdot 4 - s_i$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial s_i} = \frac{1\cdot(s_1+s_2)-s_i\cdot 1}{(s_1+s_2)^2}\cdot 4 - 1 = \frac{s_j}{(s_1+s_2)^2}4 - 1 \overset{!}{\leq} 0 \Leftrightarrow s_j 4 \leq (s_1+s_2)^2$$

$s_j 4 = (s_1+s_2)^2$, falls $s_j>0$

Fall: $s_1, s_2 > 0$ $\quad s_2 4 = (s_1 + s_2)^2 \quad , s_1 4 = (s_1 + s_2)^2$

$\Rightarrow s_1 = s_2 = s^* \quad \Rightarrow \quad s^* 4 = (s^* + s^*)^2 = 4 \cdot (s^*)^2 \quad | : 4 \, s^*$

$\Leftrightarrow \quad 1 = s^*$

Fall $s_1 = 0, \; s_2 > 0$

BEO$_1$: $\quad s_2 4 \leq (s_1 + s_2)^2 = s_2^2 \Leftrightarrow 4 \leq s_2$

BEO$_2$: $\quad \underbrace{4 s_1}_{=0} = \underbrace{(s_1 + s_2)^2}_{>0}$ ↯

Falls $s_1, s_2 = 0 \Rightarrow s_1 + s_2 = 0$

$$U_1(s_1, s_2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 0 = 2$$

Falls $s_1 = \varepsilon > 0, s_2 = 0$

$$U_1(s_1 = \varepsilon, s_2 = 0) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 0} \cdot 4 - \varepsilon = 4 - \varepsilon$$

$s_1 = s_2 = 0$: kein NGG

Einziges NGG:

$$s_1^* = s_2^* = 1 \rightsquigarrow U_i(s_1^*, s_2^*) = \frac{1}{1+1} \cdot 4 - 1 = 2 \cdot 1 = 1$$

Asymmetrische Wertschätzungen $v_1 = 4$, $v_2 = 2$

$$u_1(s_1, s_2) = \frac{s_1}{s_1 + s_2} \cdot 4 - s_1$$

$$= \frac{4}{s_1 + s_2} \cdot s_1$$

$$u_2(s_1, s_2) = \frac{s_1}{s_1 + s_2} \cdot 2 - s_2$$

BEO$_1$:

$$\frac{\partial u_1(s_1, s_2)}{\partial s_1} = \dots = \frac{s_2}{(s_1 + s_2)^2} \cdot 4 - 1 \leq 0 \quad (= 0 \text{ falls } s_1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot s_2 \leq (s_1 + s_2)^2$$

$$\frac{\partial u_2(s_1, s_2)}{\partial s_2} = \frac{s_1}{(s_1 + s_2)^2} \cdot 2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \quad 2 s_1 \leq (s_1 + s_2)^2$$

Fall $s_1, s_2 > 0$: $\underbrace{4s_2 = (s_1+s_2)^2}_{BEO_1} = \underbrace{2s_1}_{BEO_2} \Leftrightarrow 2s_2 = s_1$

$BEO_1 \Rightarrow 4s_2 = (2s_2 + s_2)^2 = 9s_2^2 \quad | : 9s_2 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} = s_2 \Rightarrow s_1 = \frac{8}{9} = 4 \cdot \frac{2}{9}$

$= 2 \cdot \frac{2}{9}$

V_2 V_1

12 $U_i(q_1, q_2) = \overbrace{(m_i - q_i)}^{x_i}\overbrace{(q_1 + q_2)}^{G}$

$U_i(x_i, G) = x_i \cdot G$

$x_i + q_i = m_i$

$\Leftrightarrow x_i = m_i - q_i$

$q_1 + q_2 = G$

$$\frac{\partial U_i}{\partial q_i} = -1(q_1 + q_2) + (m_i - q_i) \cdot 1$$

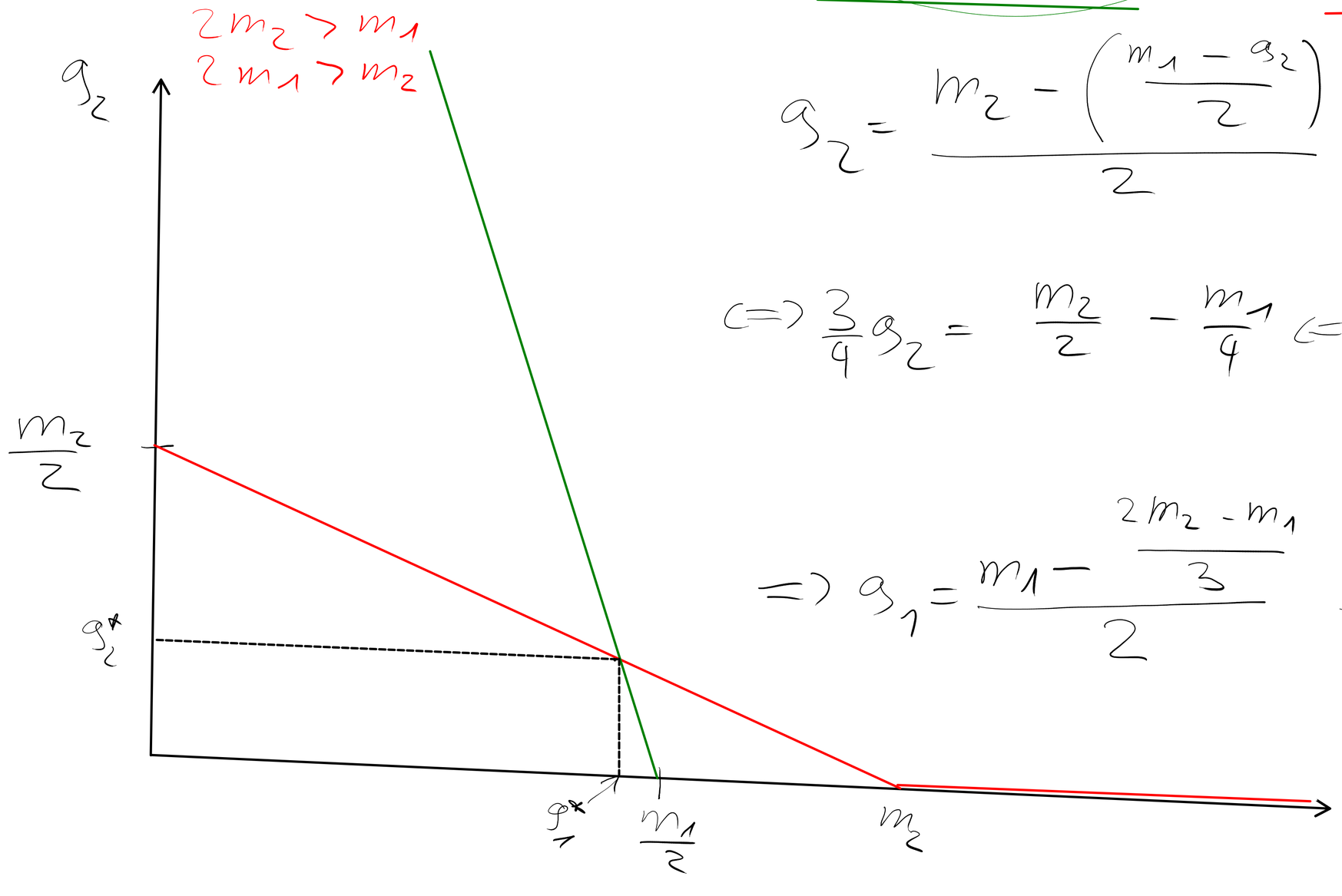
$$= -2q_i - q_j + m_i \leq 0 \quad (= 0, \text{falls } q_i > 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad m_i - q_j \leq 2q_i \iff q_i \geq \frac{m_i - q_j}{2}$$

↝ Reaktionsfunktion $q_i^*(q_j) = \begin{cases} \frac{m_i - q_j}{2}, & \text{falls } q_j < m_i \\ 0, & \text{falls } q_j \geq m_i \end{cases}$

Falls $q_i, q_j > 0$:

$$q_1 = \frac{m_1 - q_2}{2}, \quad q_2 = \frac{m_2 - q_1}{2}$$



$$q_2 = \frac{m_2 - \left(\frac{m_1 - q_2}{2}\right)}{2} = \frac{m_2}{2} - \frac{m_1}{4} + \frac{q_2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} q_2 = \frac{m_2}{2} - \frac{m_1}{4} \Leftrightarrow q_2 = \frac{2}{3} \cdot m_2 - \frac{1}{3} m_1$$

$$= \frac{2m_2 - m_1}{3}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{m_1 - \frac{2m_2 - m_1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3} m_1 - \frac{2}{3} m_2}{2}$$

$$= \frac{2m_1 - m_2}{3}$$

Fall $q_1 = 0$, $q_2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{m_2}{2} > m_1$ $\Leftrightarrow$ $m_2 > 2m_1$

$q_1 = 0$ ist beste Antwort, falls $q_2 > m_1$

beste Antwort von 2 auf $q_1 = 0$: $q_2 = \frac{m_2 - 0}{2} = \frac{m_2}{2}$

Fall $q_1 = q_2 = 0$

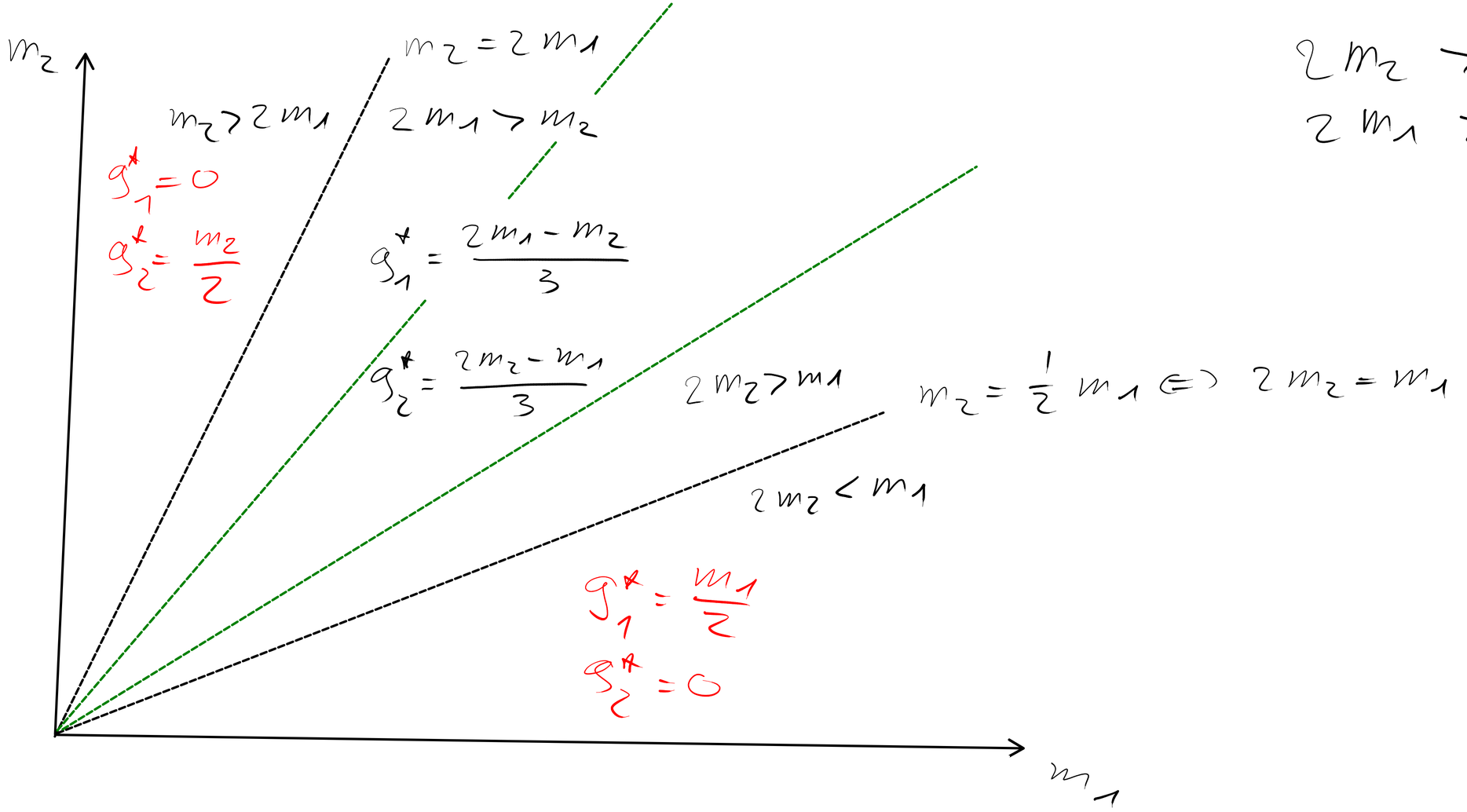
beste Antwort von 2 auf $q_1 = 0$: $q_2 = \frac{m_2 - 0}{2} > 0$ ↓

Soziales Optimum im Fall $2m_2 > m_1$, $2m_1 > m_2$

$$\max_{q_1, q_2 \geq 0} \quad U_1(q_1, q_2) + U_2(q_1, q_2) = (m_1 - q_1)(q_1 + q_2) + (m_2 - q_2)(q_1 + q_2)$$

$$= (m_1 - q_1 + m_2 - q_2)(q_1 + q_2) = (m_1 + m_2 - (q_1 + q_2))(q_1 + q_2)$$

$$\max_{G \geq 0} \quad (m_1 + m_2 - G)\, G$$


m_2
$m_2 = 2m_1$
$m_2 > 2m_1$
$2m_1 > m_2$
$q_1^* = 0$
$q_2^* = \frac{m_2}{2}$
$q_1^* = \frac{2m_1 - m_2}{3}$
$q_2^* = \frac{2m_2 - m_1}{3}$
$2m_2 > m_1$
$m_2 = \frac{1}{2} m_1 \Leftrightarrow 2m_2 = m_1$
$2m_2 < m_1$
$q_1^* = \frac{m_1}{2}$
$q_2^* = 0$
m_1

$2m_2 > m_1$

$2m_1 > m_2$

$$\max_{G \geq 0} \; (m_1 + m_2 - G)\, G$$

$$U_i(q_i^{**}, q_j^{**}) = (m_i - q_i^{**})(q_i^{**} + q_j^{**})$$

$$= \frac{m_i}{2} \, \frac{m_1 + m_2}{2}$$

BEO $\quad -1 \cdot G + (m_1 + m_2 - G) \cdot 1 = m_1 + m_2 - 2G \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{m_1 + m_2}_{>0} \leq 2G \quad \Rightarrow G > 0 \Rightarrow \quad \frac{m_1 + m_2}{2} = G \quad \Rightarrow q_i^{**} = \frac{m_i}{2}$$

Nutzen im NGG: $q_i^* = \dfrac{2m_i - m_j}{3}$

$$q_1^* + q_2^* = \frac{2m_1 - m_2}{3} + \frac{2m_2 - m_1}{3}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{3}$$

$$U_i(q_i^*, q_j^*) = (m_i - q_i^*)(q_i^* + q_j^*) = \left(\frac{3m_i}{3} - \frac{2m_i - m_j}{3} \right) \frac{m_1 + m_2}{3} = \left(\frac{m_1 + m_2}{3} \right)^2$$

$$q_i^{**} = \frac{m_i}{2} \Rightarrow u_i^{**} = \frac{m_i}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$q_i^{*} = \frac{2m_i - m_j}{3} \Rightarrow u_i^{*} = \left(\frac{m_1 + m_2}{3}\right)^2$$

Gilt $u_i^{**} > u_i^{*}$? $\quad \frac{m_i}{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{2} \overset{?}{>} \frac{m_1 + m_2}{3} \cdot \frac{m_1 + m_2}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 9 m_i > 4(m_1 + m_2) \quad | - 4 m_i$

$\Leftrightarrow \quad 5 m_i > 4 m_j$

13

(2)

(1)		links (q)	rechts (1−q)
	oben (p)	2,1	0,2
	unten (1−p)	1,2	3,0

$0 \le q \le 1$, $0 \le p \le 1$

kein NGG in reinen Strategien

$U_2(\text{links}, p) = p \cdot 1 + (1-p)2 = 2 - p$

$U_2(\text{rechts}, p) = p \cdot 2 + (1-p)0 = 2p$

$2 - p = 2p \iff 2 = 3p \iff p = \frac{2}{3}$

Erwartungsnutzen

$U_1(\text{oben}, q) = q \cdot 2 + (1-q) \cdot 0 = 2q$

$U_1(\text{unten}, q) = q \cdot 1 + (1-q) \cdot 3 = 3 - 2q$

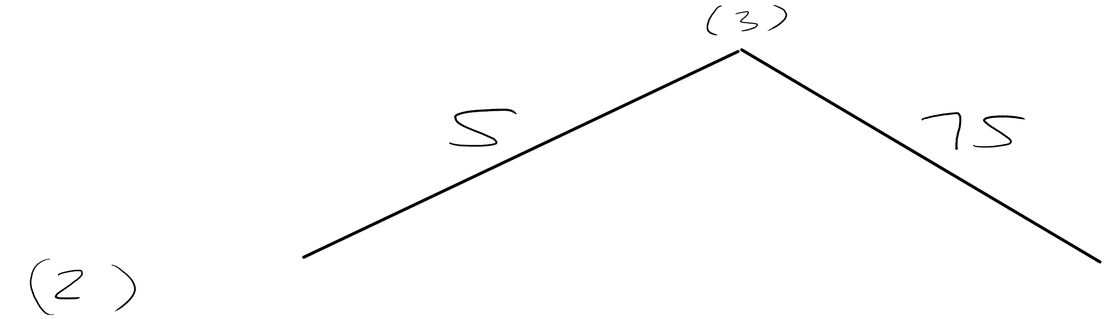
$2q = 3 - 2q \iff 4q = 3 \implies q = \frac{3}{4}$

1 ist indifferent zwischen oben & unten, falls $q = \frac{3}{4}$

Nur für $q = \frac{3}{4}$ ist 1 bereit selbst zwischen oben & unten zu mischen.

NGG in gemischten Strategien: $\left(\underbrace{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{\text{gem. Strat von 1}}, \underbrace{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)}_{\text{gem Strat. von 2}}\right)$

14



P_i: W'keit, dass (i) S wählt.

(1)

	5	7,5
5	u_1 u_2 u_3 0, 0, 0	1, 1, 1 *
7,5	1, 1, 1 *	0, 0, 0

(1)

	5	7,5
5	1, 1, 1 *	0, 0, 0
7,5	0, 0, 0	0, 0, 0 *

Vier NGG in reinen Strategien (7,5, 5, 5), (5, 7,5, 5), (5, 5, 7,5), (7,5, 7,5, 7,5)

$$U_1(5, P_2, P_3) = P_2 \cdot P_3 \cdot 0 + (1-P_2) \cdot P_3 \cdot 1 + P_2(1-P_3)\,1 + (1-P_2)(1-P_3) \cdot 0$$

$$= (1-P_2)\,P_2 + P_2(1-P_3) = P_3 + P_2 - 2P_2P_3$$

$$U_1(7,5, P_2, P_3) = P_2 \cdot P_3 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = P_2 \cdot P_3$$

$$U_1(S, p_2, p_3) = p_2 + p_3 - 2 p_2 p_3$$

$$U_1(\neg S, p_2, p_3) = p_2 \cdot p_3$$

NGG mit $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$?

$\Rightarrow$ Alle 3 müssen indifferent zwischen S & $\neg S$ sein

$$p_2 + p_3 - 2 p_2 p_3 = p_2 p_3$$

$$p_1 + p_3 = 3 p_1 p_3$$

$$p_1 + p_2 = 3 p_1 p_2$$

1 NGG in gem. Strategien

$$\hat{\sigma}^* = \left(\left(\overset{S}{\frac{2}{3}}, \overset{\neg S}{\frac{1}{3}} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)$$

Symmetrie $p_1 = p_2 = p_3 =: p$

$$U_1(\hat{\sigma}^*) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$p + p = 3 p \cdot p$$

$$2p = 3p^2$$

$$2 = 3p \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{2}{3}}$$

$U_1(S, p_2, p_3) = p_2 + p_3 - 2 p_2 p_3$

$U_1(\neg S, p_2, p_3) = p_2 \cdot p_3$

NGG mit $s_1 = S$, $0 < p_2, p_3 < 1$? #3

$p_2 + p_3 \geq 3 \cdot p_2 p_3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{3}{4}$ ✓

2: $p_1 + p_3 = 3 p_1 p_3$ hier: $p_1 = 1$

$1 + p_3 = 3 p_3 \Leftrightarrow 1 = 2 p_3 \Leftrightarrow \underline{p_3 = \frac{1}{2}}$

3: analog $\underline{p_2 = \frac{1}{2}}$

$U_1(S, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$U_{2/3}(S, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

NGG mit $s_1 = \neg S$, $0 < p_2, p_3 < 1$? Nein!

$p_2 + p_3 \leq 3 p_2 p_3$

$U_2(\neg S, S, p_3) = p_1 + p_3 - 2 p_1 p_3 = p_3$ ($p_1 \to 0$, $p_1 \to 0$)

$U_2(\neg S, \neg S, p_3) = p_1 \cdot p_3 = 0 < p_3$ ($p_1 \to 0$)

$U_1(S, p_2, p_3) = p_2 + p_3 - 2 p_2 p_3$

$U_1(\neg S, p_2, p_3) = p_2 \cdot p_3$

N_{66} zwei reine Strategien, 1 gem. Strat.

Angenommen 1 mischt: $p_2 + p_3 = 3 p_2 p_3$

$p_2 = p_3 = 0$: $0 + 0 = 3 \cdot 0 \cdot 0$ ✓

2: $p_1 \cdot \overset{\swarrow =0}{p_3} \geq p_1 + \overset{\swarrow =0}{p_3} - 2 p_1 \overset{\swarrow =0}{p_3} = U_2(p_1, S, p_3)$

$0 \geq p_1$ ↯

$p_2 = 0, p_3 = 1$

$p_1 \cdot \overset{\swarrow \uparrow}{p_3} \geq p_1 + \overset{\swarrow \uparrow}{p_2} - 2 p_1 \overset{\swarrow \uparrow}{p_3}$

$p_1 \geq p_1 + 1 - 2 p_1$

$\Leftrightarrow 2 p_1 \geq 1 \Leftarrow p_1 \geq \frac{1}{2}$

$p_1 \cdot \overset{\swarrow =0}{p_2} \leq p_1 + \overset{\swarrow =0}{p_2} - 2 p_1 \overset{\swarrow =0}{p_2}$

$0 \leq p_1$ ✓

N_{66c}: $((p_1, 1-p_1), (0,1), (1,0))$, $p_1 \geq \frac{1}{2}$

15

	Firma 1	Firma 2
Firma 1	$\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_1$	w_1, w_2
Firma 2	w_2, w_1	$\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_2$

(1) p, 1-p; (2) q, 1-q

$\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$

$\frac{1}{2}w_2 < w_1$

$U_1(F_1, q) = \frac{1}{2}w_1 q + w_1(1-q) = w_1 - \frac{1}{2}w_1 q$

$U_1(F_2, q) = w_2 \cdot q + \frac{1}{2}w_2(1-q) = \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_2 q$ } $\stackrel{!}{=}$

Indifferenz Bedingung: $w_1 - \frac{1}{2}w_1 q = \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_2 q$

$\Leftrightarrow w_1 - \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{2}w_1 q + \frac{1}{2}w_2 q$

$\Leftrightarrow 2w_1 - w_2 = (w_1 + w_2) q$

$\Leftrightarrow q^* = \frac{2w_1 - w_2}{w_1 + w_2} \in (0,1)$

Analog: $p^* = \frac{2w_1 - w_2}{w_1 + w_2}$

NGG: $((p^*, 1-p^*), (q^*, 1-q^*))$

16

	links	rechts
oben	$\underline{6}, \underline{6}$ *	$\underline{4}, \underline{6}$ *
unten	$\underline{6}, \underline{4}$ *	$1, 1$

q $1-q$

$q < 1 \Rightarrow$ oben $\succ$ links

$U_1(\text{oben}, q) = 6q + 4(1-q) = 4 + 2q$

$U_1(\text{u.L}, q) = 6q + 1 - q = 1 + 5q$

$4 + 2q \geq 1 + 5q \Leftrightarrow 3 \geq 3q \Leftrightarrow q \leq 1$ ✓

16

(2)

	q links	$1-q$ rechts
(1) oben	$\underline{6}, \underline{6}$ *	$\underline{4}, \underline{6}$ *
unten	$\underline{6}, \underline{4}$ *	$1, 1$

NGGs: (oben, links), (oben, rechts)

Creind. (unten, links)

$U_1(\text{oben}, q) = 6 \cdot q + 4(1-q)$

$U_1(\text{unten}, q) = 6 \cdot q + 1(1-q)$

oben $\succeq$ unten $\Leftrightarrow$ $q \leq 1$

NGGs gemischte: (oben, q), $0 \leq q \leq 1$

(p, links), $0 \leq p \leq 1$

18 a)

$0 < a < 1$

		q_1 ○	q_2 (2) ×	q_3 □
b)	P_1 ○	a, a	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
(1)	P_2 ×	$-1, \underline{1}$	a, a	$\underline{1}, -1$
	P_3 □	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$	a, a

c) → kein NGG in reinen Strategien

d) $U_1(○, q) = q_1 \cdot a + q_2 1 + q_3(-1)$

$U_1(×, q) = q_1(-1) + q_2 a + q_3 \cdot 1$

$U_1(□, q) = q_1 \cdot 1 + q_2(-1) + q_3 \cdot a$

$U_1(P, q) = P_1 \cdot U_1(○, q)$
$+ P_2 U_1(×, q)$
$+ P_3 U_1(□, q)$

e) —

f)

$$U_1(0,q) = q_1 \cdot a + q_2 1 + q_3(-1) \overset{!}{=} c$$

$$U_1(x,q) = q_1(-1) + q_2 a + q_3 \cdot 1 \overset{!}{=} c$$

$$U_1(\square,q) = q_1 \cdot 1 + q_2(-1) + q_3 \cdot a \overset{!}{=} c$$

$$\Rightarrow q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow c = \frac{a}{3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a^2+3)$$

$$\begin{vmatrix} a & c & -1 \\ -1 & c & 1 \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = c(a^2+3) \rightsquigarrow q_2 = \frac{c}{a}$$

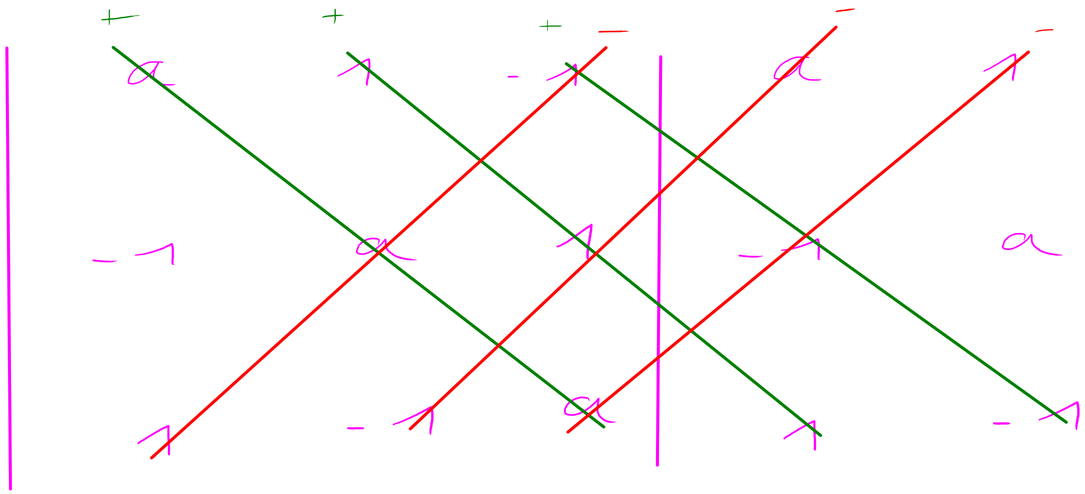
$$\begin{vmatrix} c & 1 & -1 \\ c & a & 1 \\ c & -1 & a \end{vmatrix} = c(a^2+3)$$

$$\rightsquigarrow q_1 = \frac{c(a^2+3)}{a(a^2+3)} = \frac{c}{a}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ -1 & a & c \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} = c(a^2+3)$$

$$\rightsquigarrow q_3 = \frac{c}{a}$$

Sarrus



$$= \underline{a^3} + \underline{1} - \underline{1} + \underline{a} + \underline{a} + \underline{a}$$

$$= a^3 + 3a = a(a^2 + 3)$$

$$\begin{vmatrix} c & 1 & -1 \\ c & a & 1 \\ c & -1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} c & 1 \\ c & a \\ c & -1 \end{matrix}$$

$$= ca^2 + c + c + ac + c - ac = ca^2 + 3c$$

$$= c(a^2 + 3)$$

$$\begin{vmatrix} a & c & -1 \\ -1 & c & 1 \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \begin{matrix} a & c \\ -1 & c \\ 1 & c \end{matrix}$$

$$= ca^2 + c + c + c - ac + ac = ca^2 + 3c = c(a^2 + 3)$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ -1 & a & c \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ -1 & a \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= a^2 \cdot c + c + c - ac + ac + c = a^2 \cdot c + 3c$$

$$= c(a^2 + 3)$$