Übung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Teil 3

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.8 Gauß'sche Elimininationation

Aufgabe 12.8.1 von Seite 558
Aufgabe 12.8.2 von Seite 558

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

Aufgabe 12.9.2 von Seite 567

12.10 Geraden und Ebenen

Aufgabe 12.10.1 von Seite 572
Aufgabe 12.10.4 von Seite 572
Aufgabe 12.10.5 von Seite 572

Aufgabe 12.8.1 von Seite 558

Löse die folgenden Gleichungssysteme durch Gauß'sche Elimination:

a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

homogenes LGS

a) erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 3 & \\ 3 & 5 & 5 & \downarrow (-3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c|l} x_1 & x_2 & & \\ 1 & 1 & 3 & \\ 0 & 2 & -4 & :2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & -2 & \uparrow (-1) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 5 & \leftarrow 3+(-2)(-1) \\ 0 & 1 & -2 & \\ \hline \end{array}$$

$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 5 \Leftrightarrow x_1 = 5$

$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = -2$

jede Variable hat eigene Treppenstufe $\Rightarrow$ eindeutige Lsg.

Alternativ:

$x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 3+2 = 5$

$x_2 = -2$

b)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \quad \cdot(-1),\ (-2)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array} \quad \cdot(-1),\ \cdot(-1)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \quad (-3)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -22 \end{array} \quad \cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{3} \end{array} \quad (-2)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{3} \end{array} \quad (-3),\ \cdot 5$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{20}{3} \quad (*) \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{3} \quad (**) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{3} \end{array}$$

$$K_1 = \frac{20}{3},\ K_2 = -\frac{3}{3},\ K_3 = \frac{22}{3}$$

$$7 + (-3)\frac{22}{3} = \frac{63}{9} - \frac{66}{3} = -\frac{3}{3} \quad (**)$$

$$-10 + 5 \cdot \frac{22}{3} = -\frac{90}{3} + \frac{110}{9} = \frac{20}{3} \quad (*)$$

C)

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array} \quad (-2)$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array} \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{5}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{3}{5} & 0 \end{array} \quad (-1)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\tfrac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{3}{5} & 0 \end{array}$$

$x_1 - \frac{2}{5} x_3 = 0 \iff x_1 = \frac{2}{5} x_3$

$x_2 - \frac{3}{5} x_3 = 0 \iff x_2 = \frac{3}{5} x_3$

Gerade im $\mathbb{R}^3$

Lsg:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.8.2 von Seite 558

Nutze die Gauß'sche Elimination, um zu erörtern, welches für verschiedene Werte von a und b die möglichen Lösungen des folgenden Systems sind.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & az & = & b \end{array}$$

Hinweis:

$\neq -\frac{5}{2}$ $\neq \frac{1}{2}$

Nutze für den Fall der eindeutigen Lösung z.B. $a = 0$ und $b = 3$.

erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & b \end{array} \quad \begin{matrix} \downarrow (-1) \\ \downarrow (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & b-1 \end{array} \quad | : (-2)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & a+1 & b-1 \end{array} \quad \downarrow (-1)$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & a+\frac{5}{2} & b-\frac{1}{2} \\ & & (*) & (**) \end{array}$$

Fall $a \neq -\frac{5}{2}$ → genau eine Lsg

Fall $a = -\frac{5}{2}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

und $b = \frac{1}{2}$

→ unendlich viele Lsgen

Falls $a = -\frac{5}{2}$, $b \neq \frac{1}{2}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad \neq 0$

→ keine Lsg

$$b - 1 - \frac{1}{2}(-1) = b - 1 + \frac{1}{2}$$
$$= b - \frac{1}{2} \quad (**)$$

$$a + 1 - \frac{3}{2}(-1) = a + 1 + \frac{3}{2}$$
$$= a + \frac{5}{2} \quad (*)$$

für $a = 0$, $b = 3$:

$0 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ $\quad 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \quad | \cdot \frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \uparrow (-1)$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \uparrow (-\frac{1}{2}) \quad \uparrow \cdot \frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Aufgabe 12.9.2 von Seite 567

Es sei $\mathbf{a} = (3, 1)$ und $\mathbf{b} = (-1, 2)$. Definiere $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}$ für einen Skalar λ.

a) Berechne $\mathbf{x}$, wenn $\lambda = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ und 1 ist. Illustriere die Antworten.

b) Sei $\lambda \in [0, 1]$. Welche Punktmenge durchläuft dann $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b}$?

c) Zeige: Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$, dann durchläuft $\mathbf{x}$ die gesamte Gerade durch $(3, 1)$ und $(-1, 2)$.

a)

$\lambda = 0 \quad x = b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{1}{4} \quad x = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$

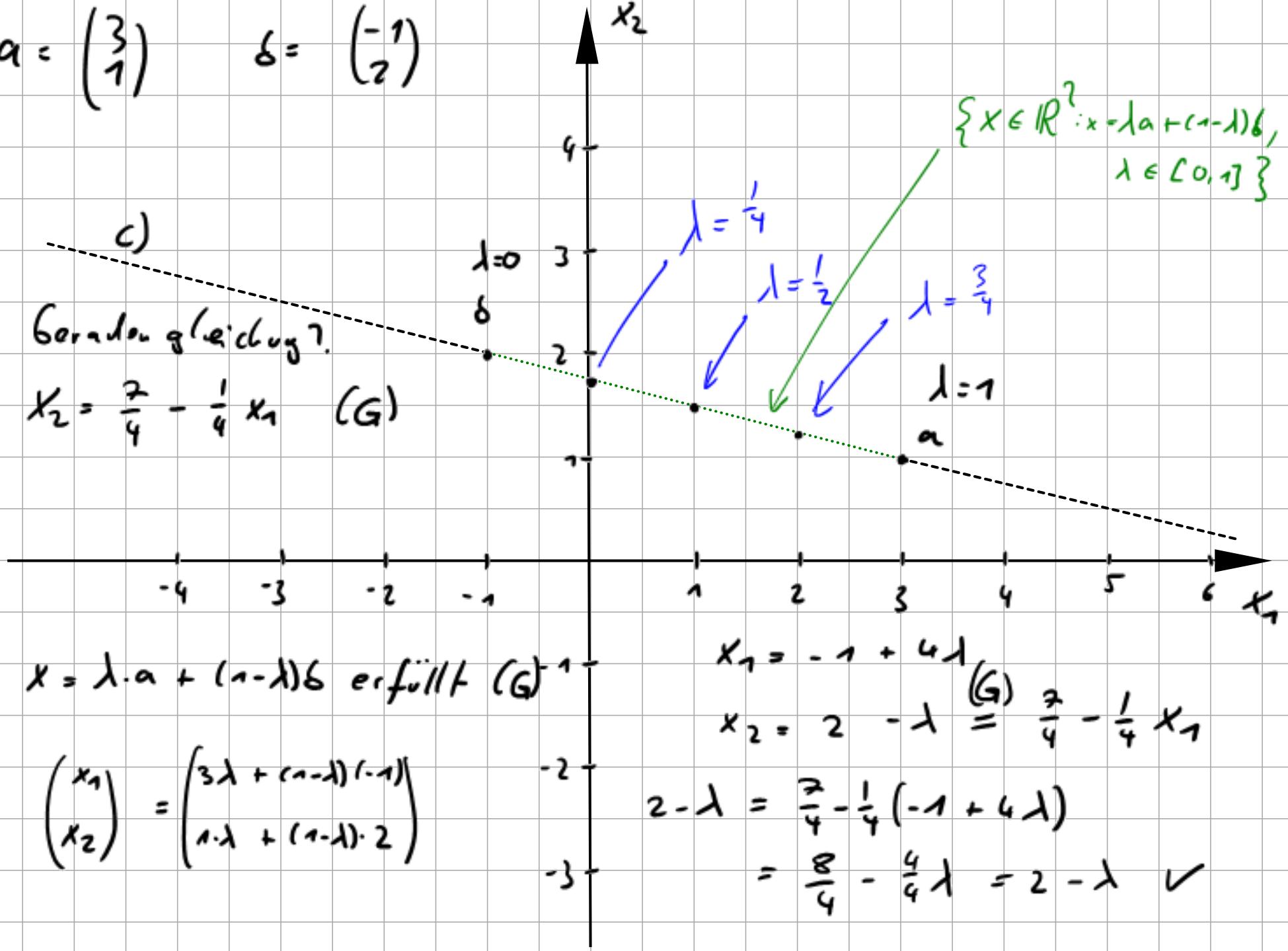
$\lambda = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 + -1 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{3}{4} \quad x = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$

$\Rightarrow x = a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$



c)

Geradengleichung:

$x_2 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} x_1 \quad (G)$

$x = \lambda \cdot a + (1-\lambda) b$ erfüllt (G)

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda + (1-\lambda)(-1) \\ 1 \cdot \lambda + (1-\lambda) \cdot 2 \end{pmatrix}$

$x_1 = -1 + 4\lambda$

$x_2 = 2 - \lambda \overset{(G)}{=} \frac{7}{4} - \frac{1}{4} x_1$

$2 - \lambda = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(-1 + 4\lambda)$

$= \frac{8}{4} - \frac{4}{4}\lambda = 2 - \lambda$ ✓

Aufgabe 12.10.1 von Seite 572

Bestimme die Gleichung der Geraden,

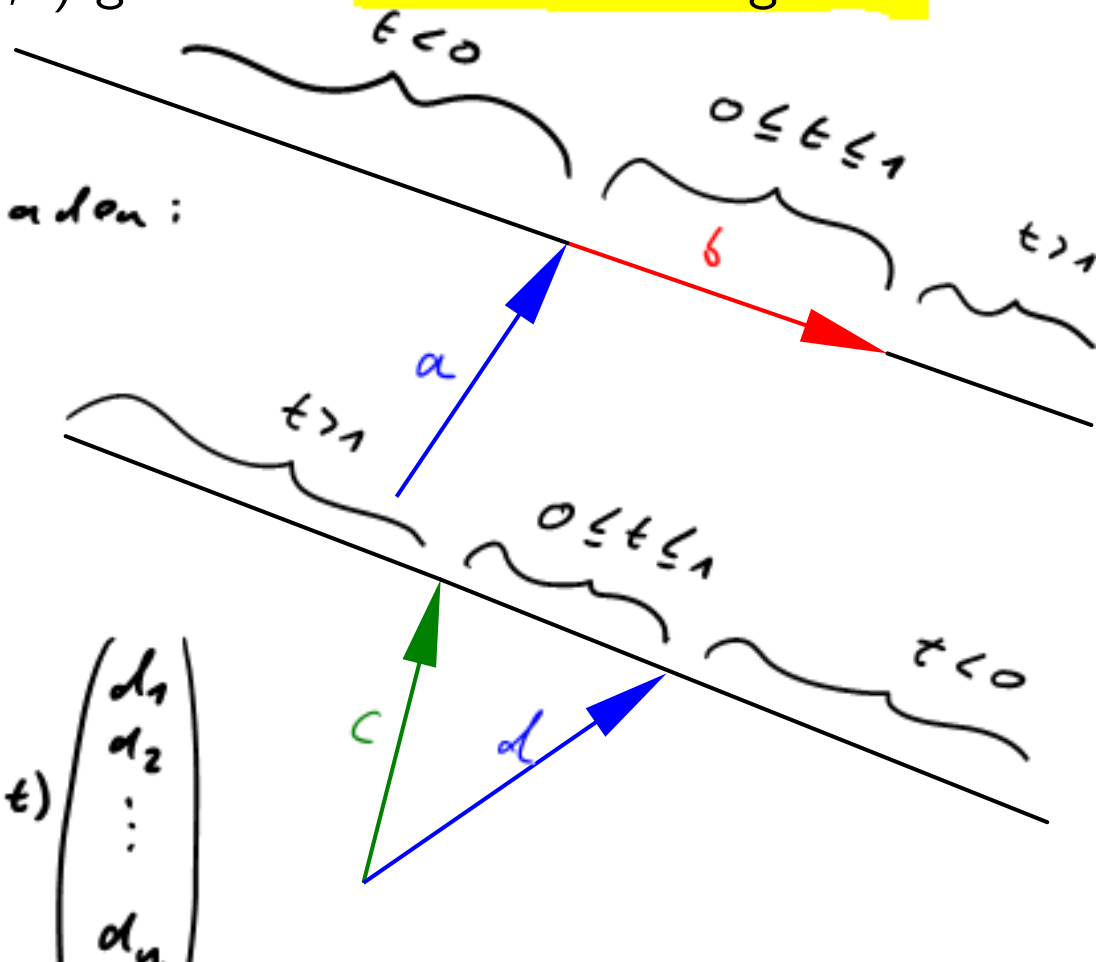
a) die durch die Punkte (3,-2,2) und (10,2,1) geht.

b) die durch den Punkt (1,3,2) geht und dieselbe Richtung wie der Vektor (0,-1,1) hat.

Gleichung einer Geraden:

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$



$(3, -2, 2)$; $(10, 2, 1)$

c $\quad$ d

2. Definition: $\quad x = t \cdot c + (1-t)\, d$

Richtungsvektor

$(1, 3, 2)$; $(0, -1, 1)$

a $\quad$ b

1. Definition: $\quad x = a + t \cdot b$

$$x = t \cdot c + (1-t)\, d = t \cdot c + d - t\, d$$

$$= d + t \cdot c - t \cdot d = \underbrace{d}_{a} + t\,(\underbrace{c-d}_{b})$$

Aufgabe 12.10.4 von Seite 572

Nehme an, dass der Preisvektor $(2, 3, 5)$ ist und dass Du Dir gerade den Warenvektor $(10, 5, 8)$ leisten kannst.

Welche Ungleichung beschreibt Deine Budgetbeschränkung?

Mathematisch:

Welche Punkte liegen unterhalb der Ebene, welche durch $(10, 5, 8)$ verläuft und den Normalenvektor $(2, 3, 5)$ hat?

Aufhängungspunkt

Wert des Güterbündels — verfügbare Geld

$$p_x x + p_y y + p_z z \leq m \leftarrow ?$$

Budgetbeschränkung

Mengen

$$m = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8$$

$$= 20 + 15 + 40 = 75$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z \leq 75$$

$$(x, y, z \geq 0)$$

Ebenengleichung:

1. $ax + by + cz = d$

Variablen: x, y, z

Parameter: a, b, c, d

Normalenvektor: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Aufhängungsvektor: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ (liegt in der Ebene)
fest

Normalenvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
fest

beliebiger Punkt in Ebene $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
(variabel)

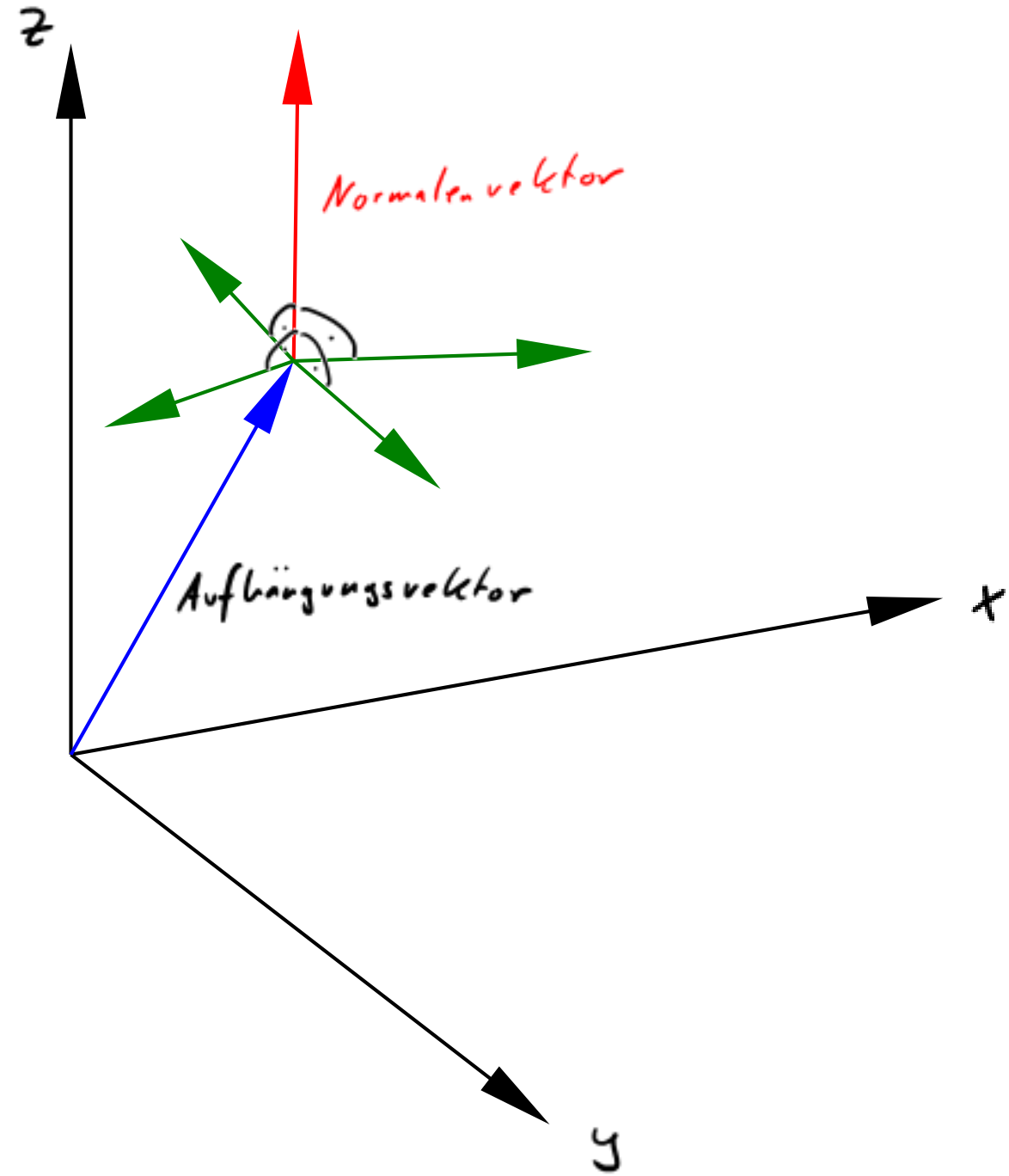
Vektor in Ebene

$$(x - y) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\text{feste Zahl}}$$

$$x_1 \cdot a + x_2 \cdot b + x_3 \cdot c = \text{feste Zahl}$$


z
Normalenvektor
Aufhängungsvektor
x
y

Aufgabe: Aufhängungspunkt $(10, 5, 8)$

Normalenvektor $(2, 3, 5)$

$(x - y)\,p = 0$ → x in der Ebene

$(x - y)\,p \leq 0$ → x unter der Ebene

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 10 \\ x_2 - 5 \\ x_3 - 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - 10) \cdot 2 + (x_2 - 5) \cdot 3 + (x_3 - 8)\,5$$

$$= 2x_1 - 20 + 3x_2 - 15 + 5x_3 - 40$$

$$= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 75 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 75}$$

Aufgabe 12.10.5 von Seite 572

Sei $\mathbf{a} = (-2, 1, -1)$.

a) Zeige, dass $\mathbf{a}$ ein Punkt in der Ebene $-x + 2y + 3z = 1$ ist.

b) Bestimme die Gleichung der Geraden, welche senkrecht zur obigen Ebene verläuft und diese in $\mathbf{a}$ schneidet.

Richtungsvektor

a) setze a in Ebenengleichung ein:

$$-(-2) + 2 \cdot 1 + 3(-1) = 2 + 2 - 3 = 1 \quad \checkmark$$

b) benutze $x = a + t\,b$ ← Richtungsvektor = $(-1, 2, 3)$

↑ Aufhängungspunkt = $(-2, 1, -1)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$