Vorlesung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

12.1 Matrizen und Vektoren

12.2 Systeme linearer Gleichungen

12.3 Matrizenaddition

12.4 Vektorenalgebra

12.5 Matrizenmultiplikation

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

12.7 Die Transponierte

12.8 Gauß'sche Elimininationen

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

12.10 Geraden und Ebenen

12.1 Matrizen und Vektoren

Matrix

Tabelle von reellen Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat die **Ordnung** $m \times n$.

Die Einträge a_{ij} der Matrix heißen **Elemente**.

Da die Elemente reelle Zahlen sind, schreiben wir auch $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Wir benutzen fettgedruckte Großbuchstaben für Matrizen.

Beispiel 12.1.1

Von welcher Ordnung sind die vier folgenden Matrizen?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1, 2, \sqrt{3}, 16 \end{pmatrix}$$

2 × 2 1 × 4

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \\ 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

4 × 2 3 × 1



Vektor

Falls eine Matrix nur aus einer Zeile besteht: **Zeilenvektor**.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Wenn die Matrix nur aus einer Spalte besteht: **Spaltenvektor**.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die Einträge eines Vektors nennen wir **Komponenten**.

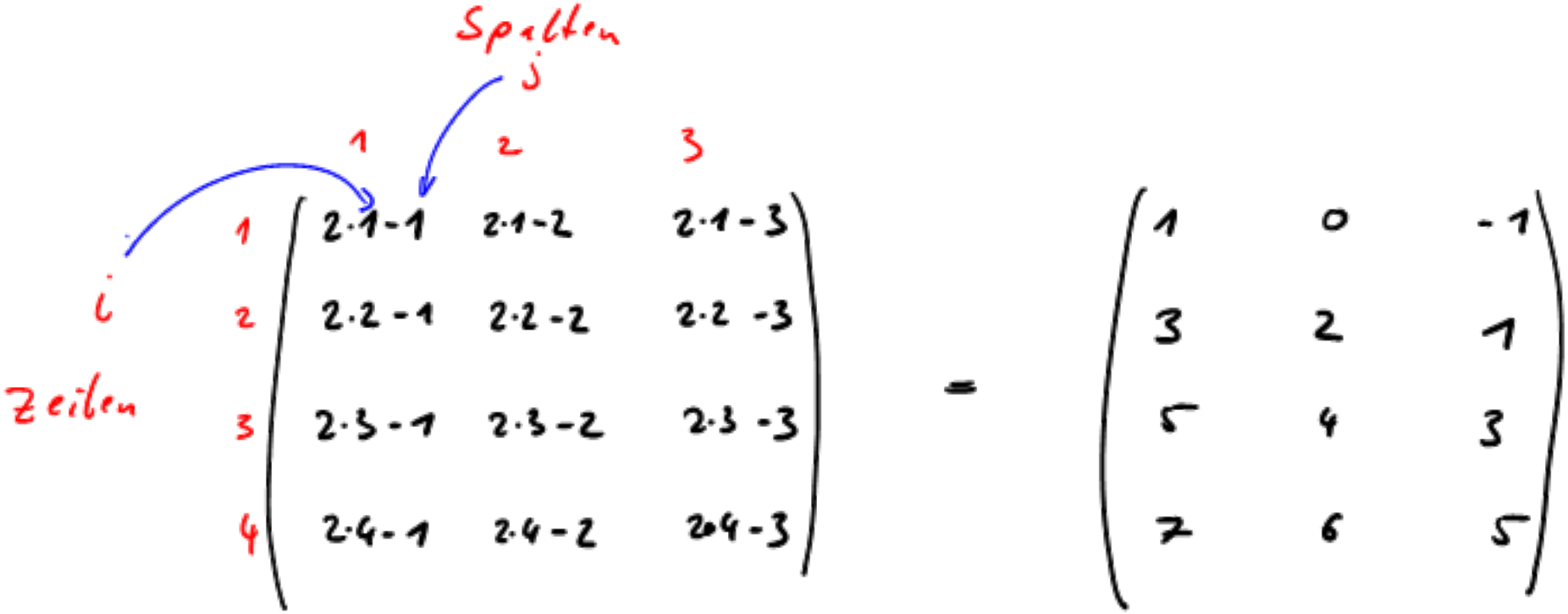
Die Anzahl der Komponenten nennen wir **Dimension**.

Wir schreiben $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Wir benutzen fettgedruckte Kleinbuchstaben für Vektoren.

Beispiel 12.1.2

Konstruiere die 4×3 Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4\times3}$ mit $a_{ij} = 2i - j$ für $i = 1, \ldots, 4$ und $j = 1, 2, 3$



Beispiel: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 1x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite (Ordnung 2×1):

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×4):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind **gleich**, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn sie dieselbe Ordnung $(m \times n)$ haben und wenn für alle für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt $a_{ij} = b_{ij}$.

Wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nicht gleich sind, schreiben wir $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Beispiel 12.1.5

Unter welchen Bedingungen gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & t-1 \\ 2t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 2v \\ u+1 & t+w \end{pmatrix} ?$$

$t=3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2v \\ u+1 & 3+w \end{pmatrix}$$

$u+1=6 \Rightarrow u=5$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2v \\ 6 & 3+w \end{pmatrix}$$

$2v=2 \Rightarrow v=1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3+w \end{pmatrix}$$

$3+w=5 \Rightarrow w=2$

12.2 Systeme linearer Gleichungen

12.2 Systeme linearer Gleichungen

m Gleichungen in n Unbekannten ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

2. Gleichung bzw. 2. Zeile

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

n. Spalte

Bezeichnungen:

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: **unbekannte Variablen**

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: **Koeffizienten** des Systems

$b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$: **rechte Seiten**

a_{ij} ist der Koeffizient der Variablen x_j in der i-ten Gleichung.

Beispiel 12.2.2

Die Koeffizientenmatrix des Systems

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der rechten Seite lautet $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

12.3 Matrizenaddition

Matrizenaddition

Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ zwei Matrizen derselben Ordnung sind, definieren wir die **Summe** von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ als die $m \times n$ Matrix $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Damit ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn α eine relle Zahl ist, definieren wir $\alpha\mathbf{A}$ durch

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

Wir definieren $-\mathbf{A}$ durch $(-1)\cdot\mathbf{A}$.

Beispiel 12.3.1

Berechne $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$ und $\left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{B}$, wenn

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & -3 & -1\end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 2×3

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 2+1 & 0+2\\ 4+1 & -3+0 & -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0\\ 3\cdot 4 & 3\cdot(-3) & 3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 12 & -9 & -3\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot 0 & -\frac{1}{2}\cdot 1 & -\frac{1}{2}\cdot 2\\ -\frac{1}{2}\,1 & -\frac{1}{2}\cdot 0 & -\frac{1}{2}\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Regeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

$-A = (-1) \cdot A$

Seien **A**, **B** und **C** beliebige $m \times n$ Matrizen und α und β seien relle Zahlen.

Außerdem bezeichne **0** die $m \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, die sogenannte **Nullmatrix**.

Dann gilt:

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

(e) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

(f) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

12.4 Vektorenalgebra

Vektoroperationen

Da Vektoren spezielle Matrizen sind, gelten die Rechenregeln für Matrizen auch für Vektoren:

1. Zwei n-Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind **gleich**, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, wenn all ihre Komponenten gleich sind, $a_i = b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
2. Für zwei n-Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist die **Summe** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ein Vektor mit den Summen der Komponenten, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_i = a_i + b_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
3. Wenn $\mathbf{a}$ ein n-Vektor ist und t eine reelle Zahl, dann ist $t\mathbf{a}$ ein Vektor mit den t-**fachen Komponenten** von $\mathbf{a}$, $(t\mathbf{a})_i = ta_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
4. Die **Differenz** zwischen zwei n-Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist definiert als $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$.

Linearkombination

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei n-Vektoren und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann heißt der n-Vektor $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ **Linearkombination** von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

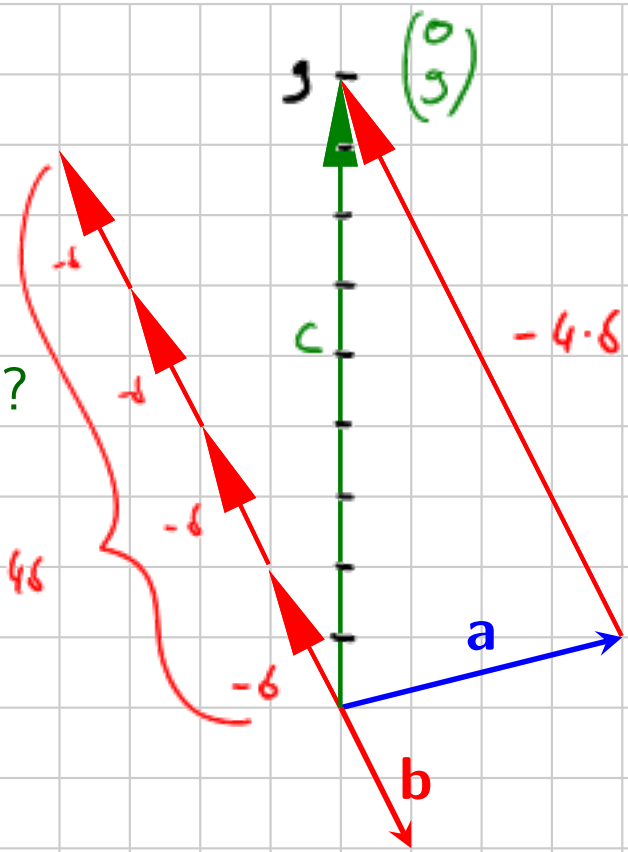
$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{c} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b} = ?$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ | $-4\mathbf{b}$

$= \begin{pmatrix} 4 + (-4)\,1 \\ 1 + (-4)\,(-2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$



Skalarprodukt: Beispiel

Anna kauft 5kg Äpfel, 3kg Bananen, 6kg Kirschen und 7kg Datteln.

Der Mengenvektor lautet:

$$\mathbf{x} = (5, 3, 6, 7)$$

Die Preise lauten 4€ pro kg Äpfel, 5€ pro kg Bananen, 3€ pro kg Kirschen und 8€ pro kg Datteln.

Der Preisvektor lautet:

$$\mathbf{p} = (4, 5, 3, 8)$$

Wie viel Geld muss Anna bezahlen?

$$x \cdot p = 5\,\text{kg} \cdot 4\,\frac{€}{\text{kg}} + 3\,\text{kg}\,5\,\frac{€}{\text{kg}} + 6\,\text{kg}\,\frac{3€}{\text{kg}} + 7\,\text{kg}\,8\,\frac{€}{\text{kg}} = \underbrace{20 + 15}_{35} + \underbrace{18 + 56}_{74}$$

$$= 109\,€$$

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der n-Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Endwert

Laufindex

Startwert

Bemerkungen:

- Das Skalarprodukt ist eine Zahl (ein „Skalar“).
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist nur dann definiert, wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die gleiche Dimension haben.

Regeln für das Skalarprodukt

Falls $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ jeweils n-Vektoren sind und α ein Skalar ist, dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(c) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \cdot (a \cdot b)$

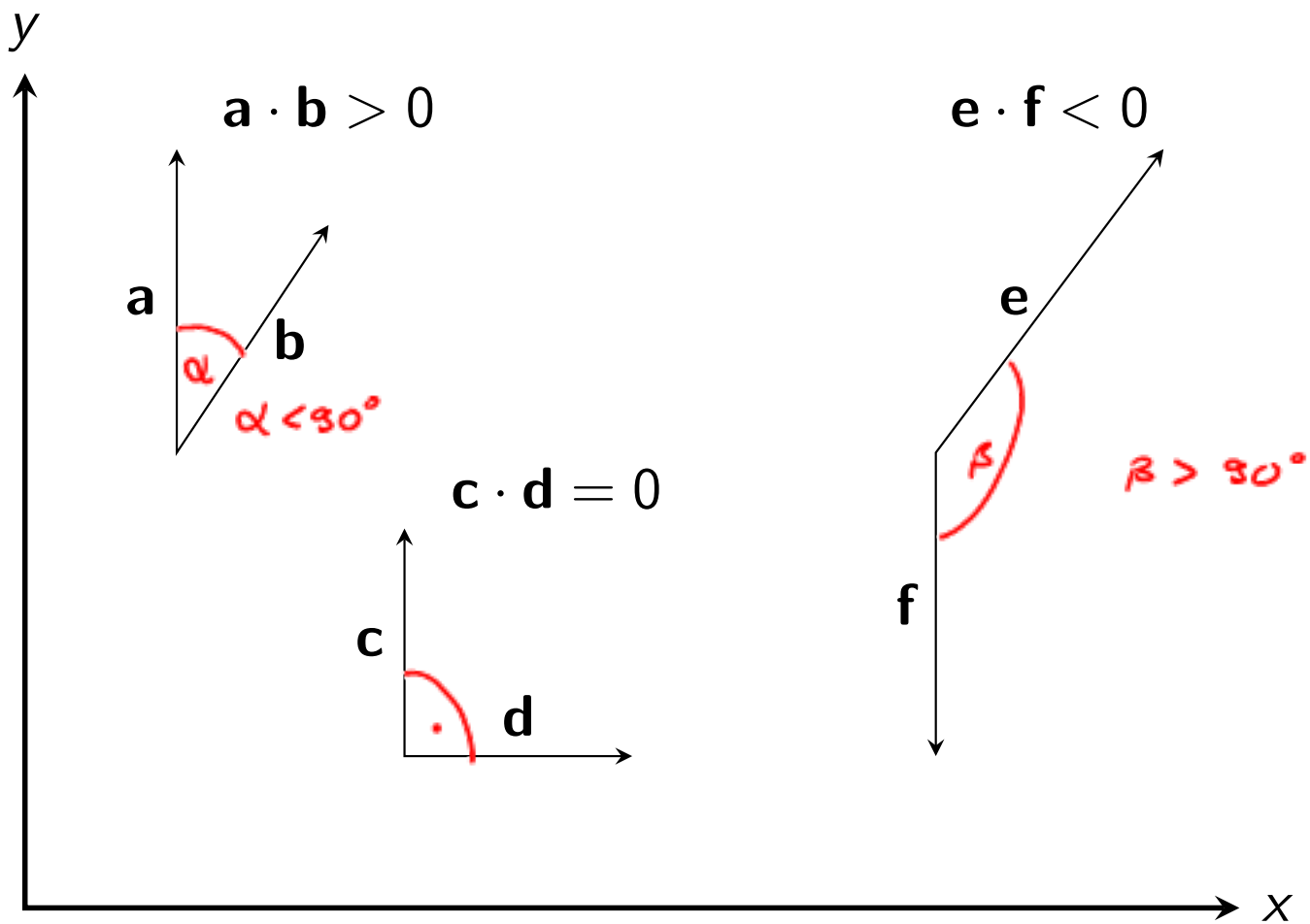
(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ $\quad a \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i^2}_{\geq 0} \geq 0$

(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

↑ orthogonal / senkrecht.

das Vorzeichen des Skalarprodukts



Skalarprodukt: Beispiel

$dx = y - x = (6-5, 5-3, 5-6, 5-7)$
$= (1, 2, -1, -2)$

$dx \cdot p = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 8$
$= 4 + 10 - 3 - 16$
$= 14 - 19 = -5 < 0$

Wenn Anna nicht den Mengenvektor

$$\mathbf{x} = (5, 3, 6, 7)$$

sondern den Mengenvektor

$$\mathbf{y} = (6, 5, 5, 5)$$

kauft, steigen oder sinken ihre Ausgaben bei gegebenen Preisvektor

$$\mathbf{p} = (4, 5, 3, 8)?$$

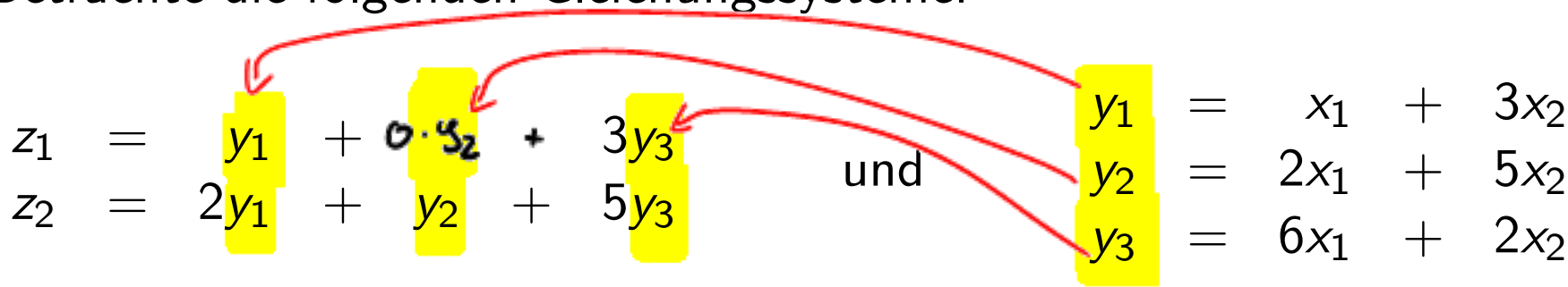
$yp - xp = (y-x)p = dx \cdot p = -5$

$yp = xp - 5 = 109 - 5 = 104$

12.5 Matrizenmultiplikation

12.5 Matrizenmultiplikation

Betrachte die folgenden Gleichungssysteme:



$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 + 0 \cdot y_2 + 3y_3 \\ z_2 &= 2y_1 + y_2 + 5y_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 5x_2 \\ y_3 &= 6x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie lautet das Gleichungssystem, welches z_1 und z_2 als Ausdrücke mit x_1 und x_2 darstellt?

Wie lautet die entsprechende Koeffizientenmatrix?

12.5 Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} z_1 &= 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \\ z_2 &= 2y_1 + 1y_2 + 5y_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_1 &= 1x_1 + 3x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 5x_2 \\ y_3 &= 6x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

$$z_1 = 1\cdot(1\cdot x_1 + 3\cdot x_2) + 0(2x_1 + 5x_2) + 3(6x_1 + 2x_2)$$

$$z_2 = 2\cdot(1x_1 + 3\cdot x_2) + 1(2x_1 + 5x_2) + 5(6x_1 + 2x_2)$$

$$z_1 = (1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 3\cdot 6)x_1 + (1\cdot 3 + 0\cdot 5 + 3\cdot 2)x_2$$

$$z_2 = (2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 6)x_1 + (2\cdot 3 + 1\cdot 5 + 5\cdot 2)x_2$$

$$z_1 = 19x_1 + 9x_2$$

$$z_2 = 34x_1 + 21x_2$$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 34 & 21 \end{pmatrix} = A\cdot B$$

12.5 Matrizenmultiplikation



Nehme an, dass $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und dass $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ die $m \times p$ Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ ist.

12.5 Matrizenmultiplikation

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$$A \cdot B = \underset{2\times 2}{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

c_{11}: $1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 6$

c_{12}: $1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2$

c_{21}: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6$

c_{22}: $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 2$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{A} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{B} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}}$$

Berechne, falls möglich, **AB** und **BA**!

$$\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 2\cdot 4 + 1\cdot 12 & 2\cdot(-7) + 1\cdot(-6) \\ c_{21} & c_{22} \\ -3\cdot 4 + (-1)\cdot 12 & -3(-7) + (-1)\cdot(-6) \\ c_{31} & c_{32} \\ 1\cdot 4 + 3\cdot 12 & 1\cdot(-7) + 3\cdot(-6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$

$\underset{2\times 2}{B} \quad \underset{3\times 2}{A}$

Spezialfall: Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{Ax}$!

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 1 \qquad\qquad 2 \times 1$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 7x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme in Matrizenform: Beispiel

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$
$$7x_1 - 2x_2 = 2$$

Definiere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Linearkombination der Spalten von A

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Eine Lösung (x_1, x_2) von

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$

$$7x_1 - 2x_2 = 2$$

sind also zwei Gewichte x_1 und x_2 für die Vektoren $\binom{3}{7}$ und $\binom{4}{-2}$, sodass die Linearkombination $x_1\binom{3}{7} + x_2\binom{4}{-2}$ den Vektor $\binom{5}{2}$ ergibt.

Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

Definiere für das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

A,**x** und **b** mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Wenn **A**, **B** und **C** Matrizen sind, deren Ordnungen so sind, dass die gegebenen Operationen definiert sind, und wenn α ein beliebiger Skalar ist, dann gilt:

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$

Vorsicht:

Es gilt im Allgemeinen **nicht**: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$!

Die Einheitsmatrix der Ordnung n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Für eine beliebige $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ gilt $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Ebenso gilt für $\mathbf{B}_{n \times m}$: $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

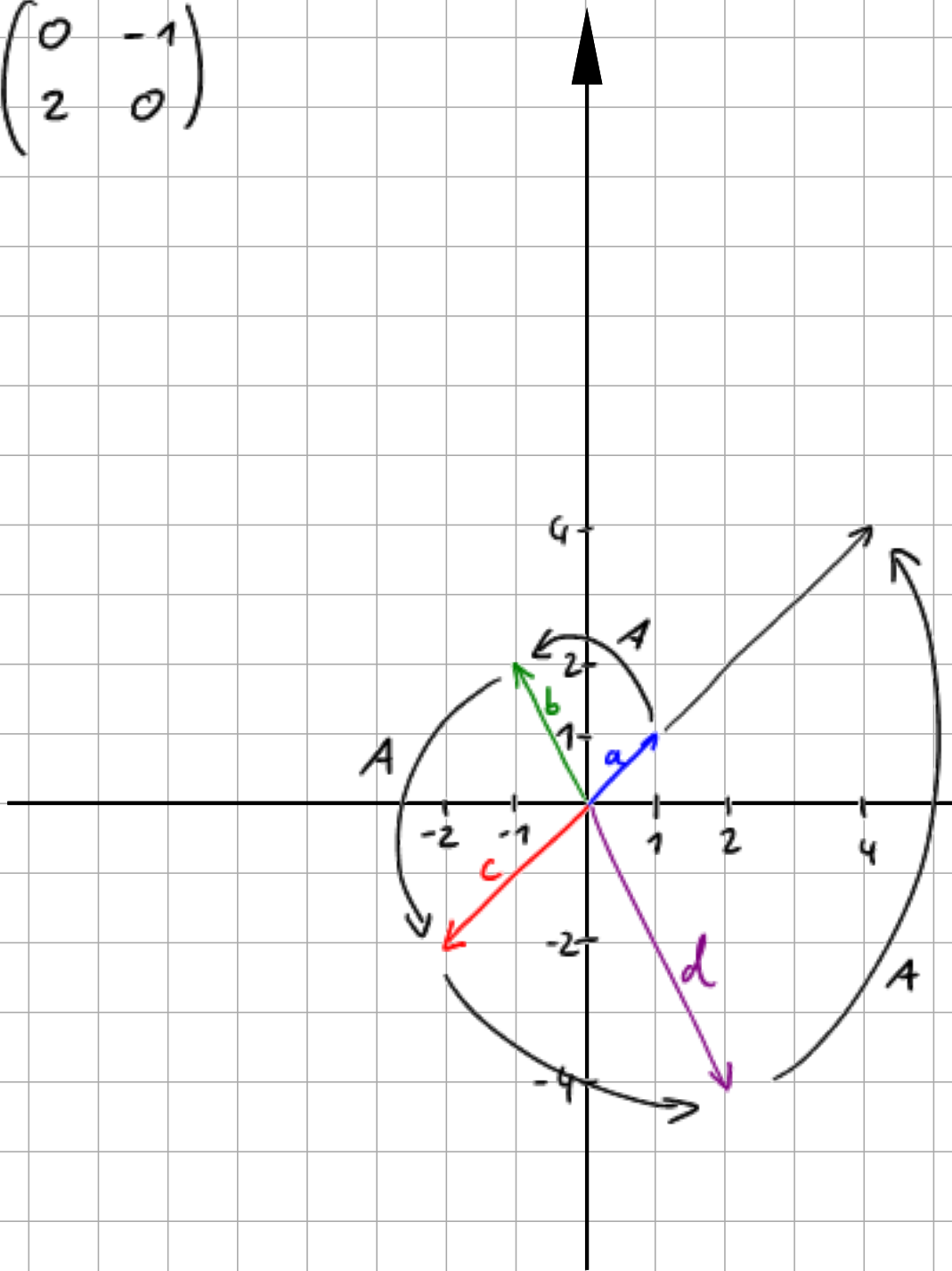
$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = c \qquad 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = d \qquad 2\times 1$$

$2\cdot(-2)+0\cdot(-2)$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ix = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Unterschiede: Produkte von Zahlen und Matrixprodukte

Seien **A**, **B** und **C** Matrizen und α, β und γ Zahlen.

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

  Aber: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

- $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oder $\beta = 0$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ impliziert nicht, dass $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

  alle Zeilen von A sind senkrecht zu allen Spalten von B.

- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ und $\alpha \neq 0$ impliziert $\beta = \gamma$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ implizieren nicht, dass $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

  $\Leftrightarrow \quad AB - AC = 0$

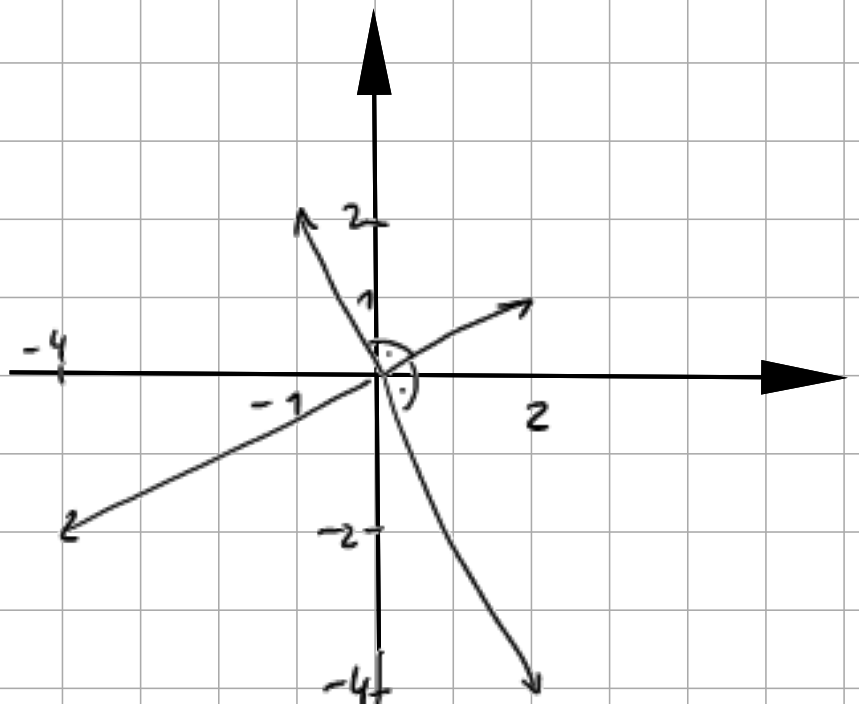
  $\Leftrightarrow \quad A(B - C) = 0$

Zahlenbeispiel zu $AB = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1(-4) \\ -4(-1) + (-2)\,2 & -4\cdot 2 + (-2)\cdot(-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



12.7 Die Transponierte

„Das Vertauschen von Zeilen & Spalten"

12.7 Die Transponierte

Für eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet die $n \times m$-Matrix $\mathbf{A}'$, deren i-te Spalte die i-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist, für $i = 1, \ldots, m$, die **Transponierte** von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponierte: Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{B}'$ und $(\mathbf{AB})'$!

Berechne dann $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$!

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} \quad (AB)' = \begin{pmatrix} 20 & -24 & 40 \\ -20 & 27 & -25 \end{pmatrix}$$

$$B'A' = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -24 & 40 \\ -20 & 27 & -25 \end{pmatrix}$$

Regeln für das Transponieren

Gegeben seien Matrizen **A** und **B**, passend für die folgenden Operationen, und gegeben sei ein beliebiger Skalar α. Dann gilt:

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}'+\mathbf{B}'$$

$$(\alpha\mathbf{A})' = \alpha\mathbf{A}'$$

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$$

$$(ABC)' = C'B'A'$$

Symmetrische Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Beispiele:

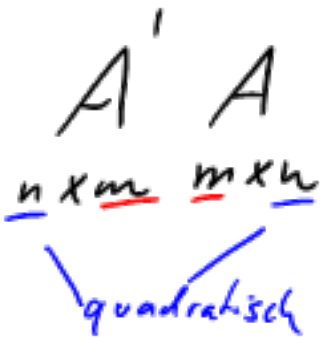
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Eine symmetrische Matrix ist notwendig quadratisch.

Symmetrie: Beispiel

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Zeige, dass $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ symmetrisch ist.



$$(A'A)' = A'A'' = A'A \quad \checkmark$$

12.8 Gauß'sche Elimininationen

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Rückblick **Additionsverfahren**

$$x_1 + 2x_2 = 3 \quad | \cdot (-4)$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

$$-4x_1 - 8x_2 = -12$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

$+$ ---

$$\underbrace{-4x_1 + 4x_1}_{=0} - 8x_2 + 5x_2 = -12 + 6$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

$$-3x_2 = -6 \quad | : (-3)$$

$$\boxed{x_2 = 2}$$

$$4x_1 + 5x_2 = 6$$

$$4x_1 + 5 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow 4x_1 = -4 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -1}$$

Elementare Zeilenoperationen

Betrachte die Gleichung

$$2x_1 - 6x_2 + 3 = 7 \quad |-3 \quad (1)$$

Wir können nun Operationen an dieser Gleichung vornehmen, ohne ihre Lösungsmenge zu verändern:

Addition von -3 (zu beiden Seiten): $\Leftrightarrow 2x_1 - 6x_2 = 4 \quad |:2$

Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ (beider Seiten): $\Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = 2 \qquad (2)$

Gleichung (1) ist **genau dann** wahr, **wenn** Gleichung (2) wahr ist.

Wir schreiben (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Beispiel 12.8.1

Lösung (von später)
$x_1 = 2 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 1$

Bestimme alle möglichen Lösungen des Systems

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \end{array}$$

Modifiziere das System dabei so, dass:

- x_1 erscheint nur in der ersten Gleichung
- x_2 erscheint nur in der ersten & zweiten Gleichung
- x_3 erscheint in allen drei Gleichungen

- Das modifizierte System muss äquivalent zum Originalsystem sein!

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 &= -7 \\
1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 2 \\
-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 2 \\
0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 &= -7 \quad | +\cdot 3 \\
-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 2 \\
0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 &= -7 \\
0x_1 + \overset{1\cdot 3+2}{5}x_2 + \overset{2\cdot 3+2}{11}x_3 &= \overset{2\cdot 3-10}{-4} \quad | +\cdot\left(-\tfrac{5}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= 2 \\
0x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 &= -7 \\
0x_1 + 0x_2 + \underbrace{\tfrac{27}{2}}_{=11+(-1)\cdot(-\frac{5}{2})}x_3 &= \underbrace{\tfrac{27}{2}}_{=-4+(-7)(-\frac{5}{2})}
\end{aligned}
$$

Beispiel 12.8.1 von Seite 553

Originalsystem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Falls jedes x_i eine eigene Treppenstufe hat, ist die Lsg. eindeutig.

Treppenstufenform:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ \frac{27}{2} \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenoperationen

Bei einem gegebenen System von linearen Gleichungen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

bleibt nach folgenden elementaren Zeilenoperationen die Lösungsmenge unverändert:

- Addition einer Konstante
- Multiplikation mit einer Konstanten $\neq 0$
- Addition zweier Zeilen
- Vertauschen zweier Zeilen

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

bzw.

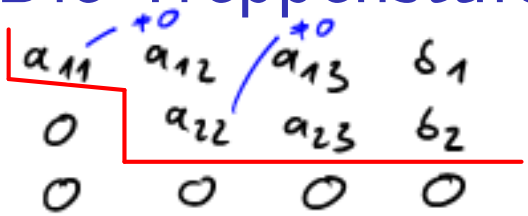
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

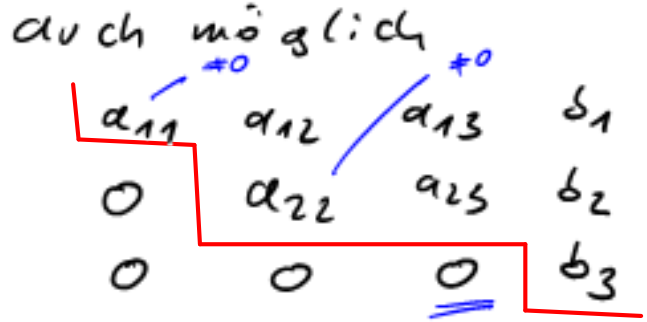
heißt die $m \times n + 1$-Matrix

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix.

Die Treppenstufenform

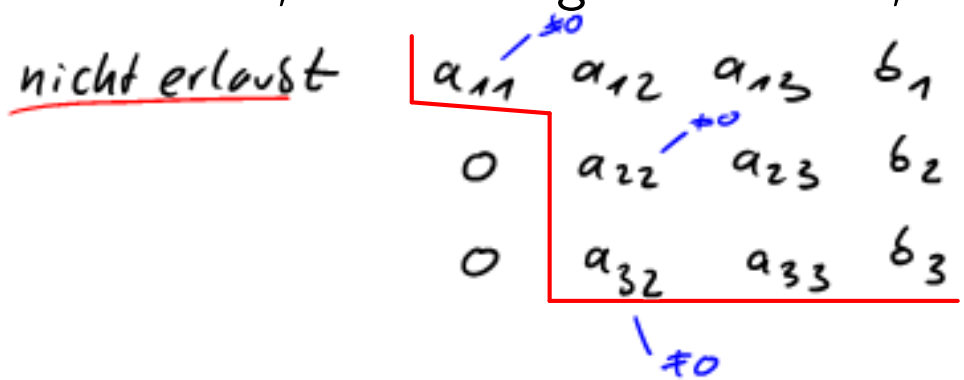




Die jeweils nächste Zeile der Matrix muss beginnend mit dem ersten Eintrag mehr aufeinander folgende Nullen haben, als die vorherige Zeile.

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Das jeweils erste Element einer Zeile, das nicht gleich null ist, heißt **führender Eintrag**.



Gauß'sches Elimininationsverfahren zur Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}|\,\mathbf{b}$

Benutze nun elementare Zeilenumformungen um:

2. $\mathbf{A}|\,\mathbf{b} \rightarrow$ Treppenstufenform
   (Falls führender Eintrag in letzter Spalte: keine Lösung.)
3. Jeder führende Eintrag $\rightarrow 1$
4. Alle Felder über jedem führenden Eintrag $\rightarrow 0$
5. Rückführung in ein lineares Gleichungssystem
6. Drücke die führenden Unbekannten durch restliche Unbekannte aus
7. Wähle beliebige Werte für die restlichen Unbekannten.

Die Anzahl der Unbekannten, die frei gewählt werden können (möglicherweise gibt es keine) ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade .

Schritt 3

führende Einträge → 1

1	1	3	2	
0	2	-1	-7	$\cdot \frac{1}{2}$
0	0	$\frac{27}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\cdot \frac{2}{27}$

Schritt 4

1	1	3	2	
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$+(-1)$
0	0	1	1	

1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$	$+(-\frac{7}{2})$
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$+\cdot\frac{1}{2}$
0	0	1	1	

$3+(-\frac{1}{2})\cdot(-1)$ $\quad$ $2+(-\frac{7}{2})\cdot(-1)$

Schritt 5

Rückführung in LGS

1	0	0	$\frac{11}{2}+1\cdot(-\frac{7}{2})$
0	1	0	-3 $\quad -\frac{7}{2}+1\frac{1}{2}$
0	0	1	1

6. & 7. entfallen

$$1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 2$$
$$0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -3$$
$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 1$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -3$
$x_3 = 1$

eindeutige Lösung

Beispiel 12.8.2 von Seite 555

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\
3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11
\end{array}
$$

$\Rightarrow$

Schritt 1

$$
\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrrr}
1 & 3 & -1 & 4 \\
2 & 1 & 1 & 7 \\
2 & -4 & 4 & 6 \\
3 & 4 & 0 & 11
\end{array}\right)
$$

Schritt 2: Treppenstufenform

$$\begin{array}{cccc}
1 & 3 & -1 & 4 \\
2 & 1 & 1 & 7 \\
2 & -4 & 4 & 6 \\
3 & 4 & 0 & 11
\end{array}$$

$+\cdot(-2)$, $+\cdot(-2)$, $+\cdot(-3)$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & -5 & 3 & -1 \\
0 & -10 & 6 & -2 \\
0 & -5 & 3 & -1
\end{array}$$

$1+3\cdot(-2)$, $1+(-1)(-2)$, $7+4(-2)$; $-4+3\cdot(-2)$, $4+(-1)(-2)$, $6+4(-2)$; $4+3(-3)$, $0+(-1)\cdot(-3)$, $11+4(-3)$

$+\cdot(-2)$, $+\cdot(-1)$

$$\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & -5 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$6+3(-2)$, $-2+(-1)(-2)$

Schritt 3: führenden Koeffizienten → 1

$1\cdot(-\frac{1}{5})$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 3 & -1 & 4 \\
0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Schritt 4

$+\cdot(-3)$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{17}{5} \\
0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Nebenrechnung:

$$-1+(-\tfrac{3}{5})(-3) =$$

$$-1+\tfrac{9}{5} = -\tfrac{5}{5}+\tfrac{9}{5} = \tfrac{4}{5}$$

$$4+\tfrac{1}{5}(-3) = 4-\tfrac{3}{5}$$

$$= \tfrac{20}{5}-\tfrac{3}{5} = \tfrac{17}{5}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Schritt 5
Rückführung in LGS

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{4}{5} x_3 = \frac{12}{5}$$
$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - \frac{3}{5} x_3 = \frac{1}{5}$$

Schritt 6:
Drücke x_1 & x_2 durch x_3 aus.

$$x_1 + \frac{4}{5} x_3 = \frac{12}{5}$$
$$x_2 - \frac{3}{5} x_3 = \frac{1}{5}$$

Schritt 7:

$$x_1 = \frac{12}{5} - \frac{4}{5} x_3$$
$$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} x_3$$

$x_3 = 5 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$

$$x_1 = \frac{12}{5} - 4 \cdot t$$
$$x_2 = \frac{1}{5} + 3t$$
$$x_3 = 0 + 5 \cdot t$$

Gerade im $\mathbb{R}^3$

Unendlich viele Lösungen

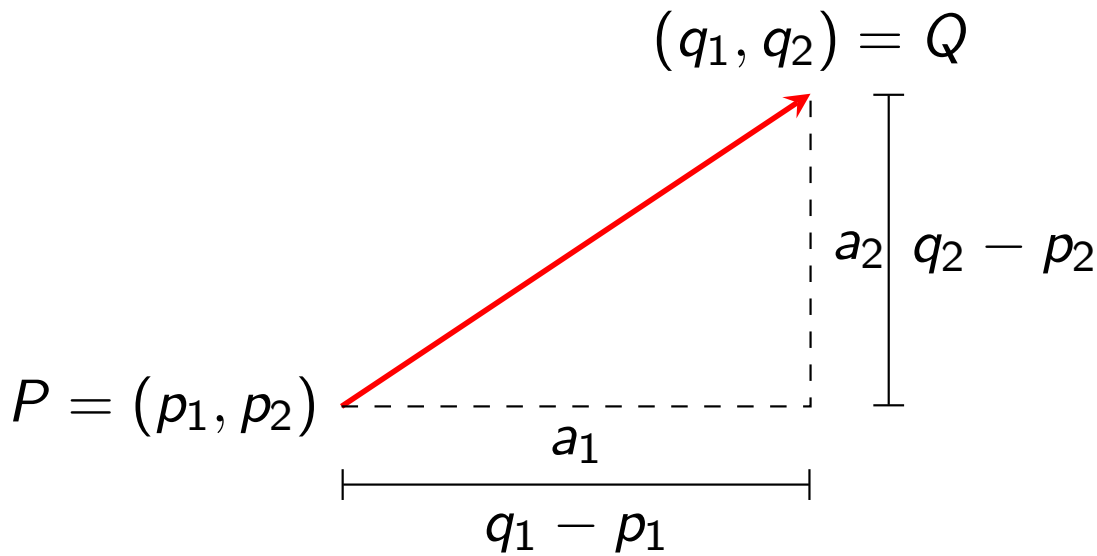
Für Folie 60

$b = \left(\frac{12}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ $\quad (a-b) = (-4, 3, 5)$

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

Ein Vektor **a** beschreibt die Bewegung von einem Punkt P zu einem Punkt Q.



Für $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$ gilt $a_1 = q_1 - p_1$ und $a_2 = q_2 - p_2$.

Der Vektor von P nach Q heißt $\overrightarrow{PQ}$ bzw. geometrischer Vektor.

Länge von Vektoren

(Euklidische-)

Die Länge oder Norm eines Vektors $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ist definiert durch

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

$||\mathbf{a}||$ ist die Entfernung des Ursprungs $(0, 0, \ldots, 0)$ von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

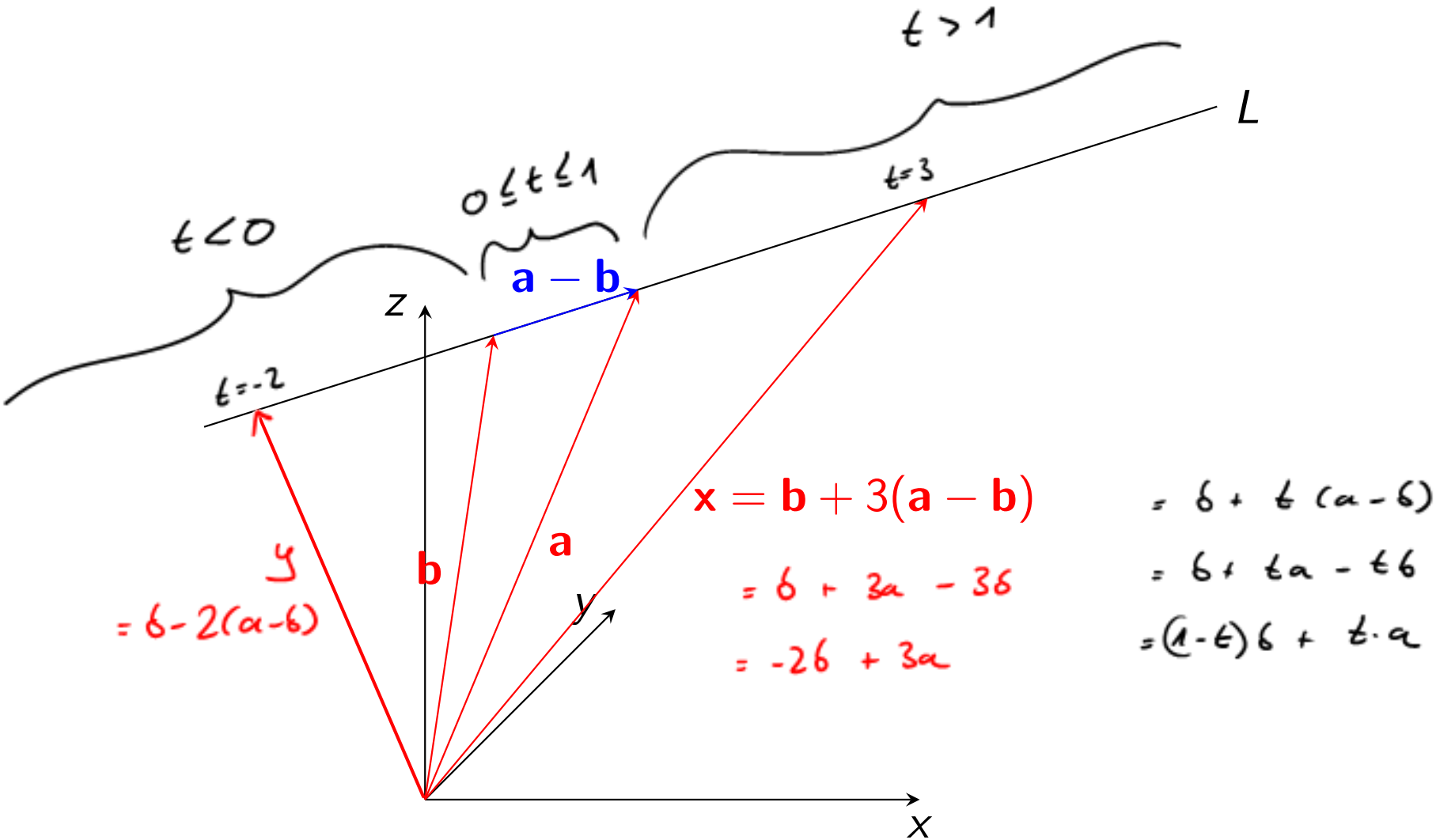
Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ ist definiert durch:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

Es gilt $||\alpha\mathbf{a}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{a}||$ für alle Zahlen α und $||\mathbf{a}|| \geq 0$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $||\mathbf{a}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

12.10 Geraden und Ebenen

Gerade im $\mathbb{R}^3$



$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{b} + t \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}), \ t \in \mathbb{R}\}$$

Gerade im n-dimensionalen Raum

Die Gerade L in $\mathbb{R}^n$ durch die zwei verschiedenen Punkte $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\mathbf{x} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$$

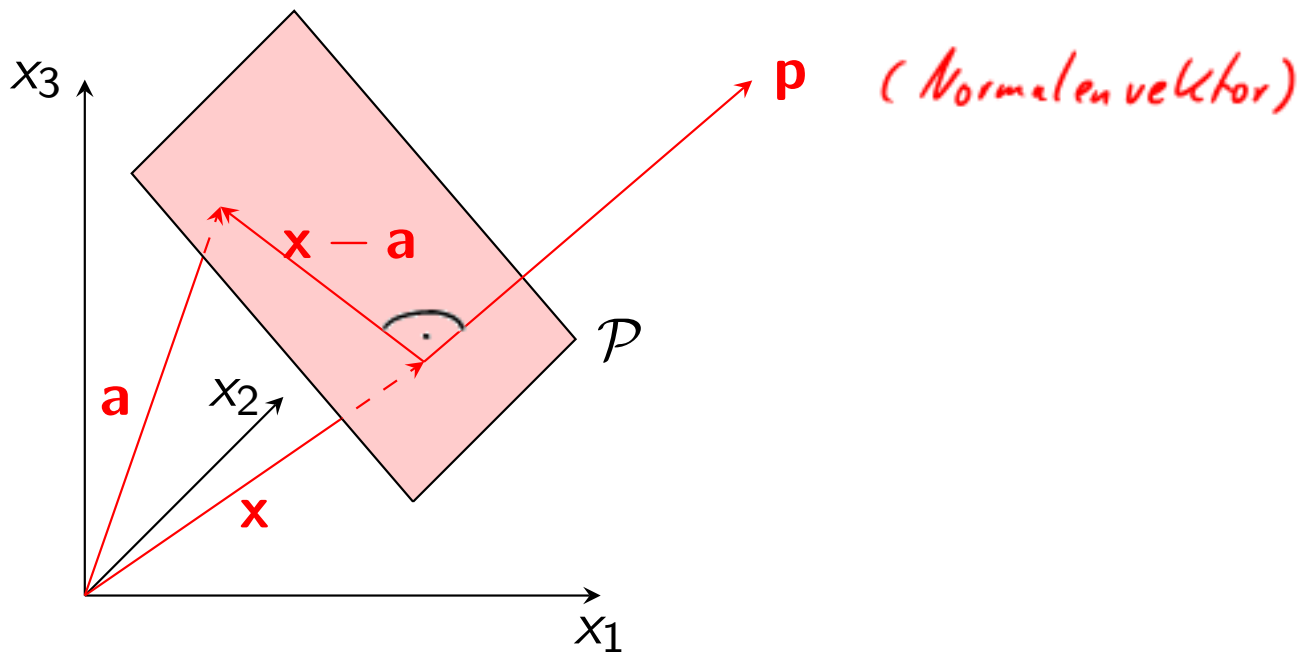
für relle Zahlen t.

$$= ta + b - tb$$
$$= b + ta - tb$$
$$= b + t(a-b)$$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Für zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ist die Ebene $\mathcal{P}$ definiert durch

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\}$$



Der Vektor $\mathbf{p}$ heißt **Normalenvektor** der Ebene $\mathcal{P}$.

Budgetbeschränkung

Güterbündel (x_1, x_2, x_3) $x_i \geq 0$ Menge von Gut i

Preisvektor (p_1, p_2, p_3) $p_i > 0$ Preis für Gut i

Wert eines Güterbundels — verfügbare Einkommen

$$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = \boxed{x \cdot p = m}$$

Vorherige Folie:

$$p(x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow px - pa = 0$$

$$\Leftrightarrow px = p \cdot a$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \underbrace{p_1a_1 + p_2 \cdot a_2 + p_3a_3}_{=m}$$

Beispiel für Ebenengleichung

$1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$

Ein Punkt in der Ebene: $(4, 0, 0)$ oder $(0, -2, 0)$

Vektor: $(1, -2, 3)$ Normalenvektor

Hyperebene im n-dimensionalen Raum

Die Hyperebene H im $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, die orthogonal zu dem Vektor $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, mit $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, ist, ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

Eine grafische Darstellung für $n > 3$ ist nicht möglich.

Zusammenfassung

- Matrixaddition
- Multiplikation Matrix mit Skalar
- Skalarprodukt: Multiplikation Vektor mit Vektor
- Multiplikation Matrix mit Vektor
- Linearkombination
- Multiplikation Matrix mit Matrix
- Transponierte einer Matrix
- Symmetrie
- Lineare Gleichungssysteme in Matrixnotation
- Gauß'sche Elimination
- Vektoren und Ebenen