

Einführung in die Spieltheorie

Wintersemester 2026/27

Dr. Lars Metzger
Fakultät Wirtschaftswissenschaften
TU Dortmund

Einführung

Kapitel 1 Statische Spiele unter vollständiger Information

- Kapitel 1.1 Grundlegende Begriffe
- Kapitel 1.2 Ökonomische Anwendungen
- Kapitel 1.3 Gemischte Strategien und Existenz eines Nash Gleichgewichts

Was ist Spieltheorie?

Die Spieltheorie ist eine Methode zur Analyse strategischer Interaktionen von rationalen Individuen.

Strategische Interaktion bedeutet, dass die Ergebnisse von den Aktionen aller Akteure abhängen.

Ziele der Spieltheorie:

- (positiv:) Wie **werden** sich rationale Akteure verhalten?
- (normativ:) Wie **sollen** sich die Akteure verhalten?

Nach diesem Semester könnt ihr:

komplexe ökonomische Probleme ...

- strukturell einordnen,
- auf essentielle Bestandteile reduzieren,
- formal darstellen,
- und lösen.

Eine Lösung besteht aus einer Beschreibung, wie sich rationale Akteure entscheiden und wie sie sich aus gemeinschaftlicher Perspektive entscheiden sollten.

Wir *designen* Probleme so, dass sich rationale Akteure so entscheiden, wie sie sich entscheiden sollten.

Lehrbuch

Die Vorlesung basiert zu großen Teilen auf dem Lehrbuch von:

Robert Gibbons, „A Primer in Game Theory“

Dieses Lehrbuch ist in englischer Sprache erschienen.

Ebenfalls exzellent:

Holler, Illing, Napel: „Einführung in die Spieltheorie“

Allerdings: Die didaktische Struktur ist anspruchsvoller.

Dieses Buch ist zu empfehlen, wenn die Vorlesung bereits gehört wurde.

Inhaltlicher Überblick

- **Kapitel 1**

  Statische Spiele unter vollständiger Information

- **Kapitel 2**

  Dynamische Spiele unter vollständiger Information

- **Kapitel 3**

  Statische Spiele unter unvollständiger Information

Das Thema

- **Kapitel 4**

  Dynamische Spiele unter unvollständiger Information

wird in dieser einführenden Vorlesung nicht behandelt.

Anwendungen von Kapitel 1

Statische Spiele unter vollständiger Information

In **statischen** Spielen entscheiden alle Akteure gleichzeitig.

Unter **vollständiger** Information kennen alle Akteure die Ziele aller anderen Akteure.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- das Gefangenen Dilemma
- Koordinierungsspiele
- den Beauty Contest
- Cournot und Betrand Oligopole
- die private Bereitstellung öffentlicher Güter
- Wettstreite

Anwendungen von Kapitel 2

Dynamische Spiele unter vollständiger Information

In **dynamischen** Spielen entscheiden die Akteure nacheinander.

Unter **vollständiger** Information kennen alle Akteure die Ziele aller anderen Akteure.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- das Stackelberg Duopol
- das Rubinstein-Verhandlungsspiel
- Bank Runs
- Zölle und Wettbewerb
- nochmal das Gefangenen Dilemma
- ... und weitere Probleme

Anwendungen von Kapitel 3

Statische Spiele unter unvollständiger Information

In **statischen** Spielen entscheiden alle Akteure gleichzeitig.

Unter **unvollständiger** Information kennen manche Akteure die Ziele mancher anderen Akteure nicht.

Wir untersuchen in diesem Kapitel:

- Erst- und Zweitpreis Auktionen
- Doppelte Auktionen
- Korreliertes Gleichgewicht
- Cournot Oligopol mit asymmetrischer Information

Materialien

Alle Vorlesungsfolien und Übungsaufgaben, sowie die Vorlesungen und Übungen bedienen sich der deutschen Sprache.

Alle Materialen und Notizen werden über Moodle bereitgestellt.

→ moodle.tu-dortmund.de/course/view.php?id=33150

Die Vorlesungen und Übungen werden gestreamt und aufgezeichnet und stehen Euch als Videos zur Verfügung.

→ youtube.com/@larsmetzger

Statische Spiele unter vollständiger Information

Moodle

Kapitel 1: Statische Spiele unter vollständiger Information

statisch:

Die Akteure wählen die Aktionen gleichzeitig und einmalig.

vollständige Information:

Jeder Akteur kennt die Auszahlungsfunktion aller Akteure.

Dynamische oder *sequentielle Spiele* → Kapitel 2 und 4

Spiele mit unvollständiger Information → Kapitel 3 und 4

Das Gefangenen Dilemma

Luce & Raiffa (1957) S. 95

Two suspects are taken into custody and separated. The district attorney ist certain that they are guilty of a specific crime, but he does not have adequate evidence to convict them at a trial. He points out to each prisoner that each has two alternatives: to confess to the crime the police are sure they have done, or not to confess. If they both do not confess, then the district attorney states he will book them on some very minor trumped-up charge such as petty larceny and illegal possession of a weapon, and they will both receive minor punishment; if they both confess they will be prosecuted, but he will recommend less than the most severe sentence; but if one confesses and the other does not, then the confessor will receive lenient treatment for turning state's evidence whereas the latter will get "the book" slapped at him.

Beispiel: Das Gefangenen Dilemma

A

Anna: leugnet
Bob: leugnet

1 Monat für Anna
1 Monat für Bob

B

Anna: leugnet
Bob: gesteht

9 Monate für Anna
0 Monate für Bob

C

Anna: gesteht
Bob: leugnet

0 Monate für Anna
9 Monate für Bob

D

Anna: gesteht
Bob: gesteht

6 Monate für Anna
6 Monate für Bob

Forschungsfragen

- Wie werden die vier Zustände gereiht?
- Welche Reihung der vier Zustände ist rational?
- Wie entscheiden sich rationale Akteure?
- Wie sollten sie sich entscheiden?

Grundlegende Begriffe

Rationale Präferenzen und Spieler:innen

„A mind. so gut wie B"

$A \succsim B$

Eine **Präferenzordnung** $\succsim$ über eine Menge von Zuständen (wie z.B. A, B, C und D) **ist rational**, falls

$A \succ B$ „A strikt besser als B"

- jede zwei Zustände mit $\succsim$ verglichen werden können (Vollständigkeit)
- aus $X \succsim Y$ und $Y \succsim Z$ folgt $X \succsim Z$ (Transitivität)

Intransitiv:

$X \succ y \succ z \succ x$



Eine **Spieler:in ist rational**, falls sie sich gemäß ihrer Präferenzordnung entscheidet.

Über die Zustände A, B, C, D gibt es 51 verschiedene rationale Präferenzordnungen!

Beispiel: Das Gefangenen Dilemma

Es gibt viele begründbare Präferenzordnungen über die vier Ausgänge des Spiels.

Das Spiel wird nicht nur durch die Spielregeln definiert, sondern ebenfalls durch die Präferenzordnungen der Spieler:innen.

Die Spieltheorie nimmt die Präferenzordnungen, genauso wie die Spielregeln, als gegeben an.

Das Spiel „Gefangenen Dilemma“ ist nun durch folgende Präferenzordnungen definiert:

Die Personen interessieren sich...

- nicht für die Zukunft. („One Shot Game“)
- nur für die eigene Zeit im Gefängnis. (Egoistische Akteure)

Präferenzordnung für das Gefangenen Dilemma

Anna

Bob: $B \succ A \succ D \succ C$

Wenn sich die Personen per Annahme

- nicht für die Zukunft und
- nur für die eigene Zeit

interessieren, so resultiert folgende Präferenzordnung:

$$C \text{ (0 Mon.)} \succ A \text{ (1 Mon.)} \succ D \text{ (6 Mon.)} \succ B \text{ (9 Mon.)}$$

Mon Bob: 9 1 6 0

Wir repräsentieren diese Präferenzordnung durch Nutzenzahlen:

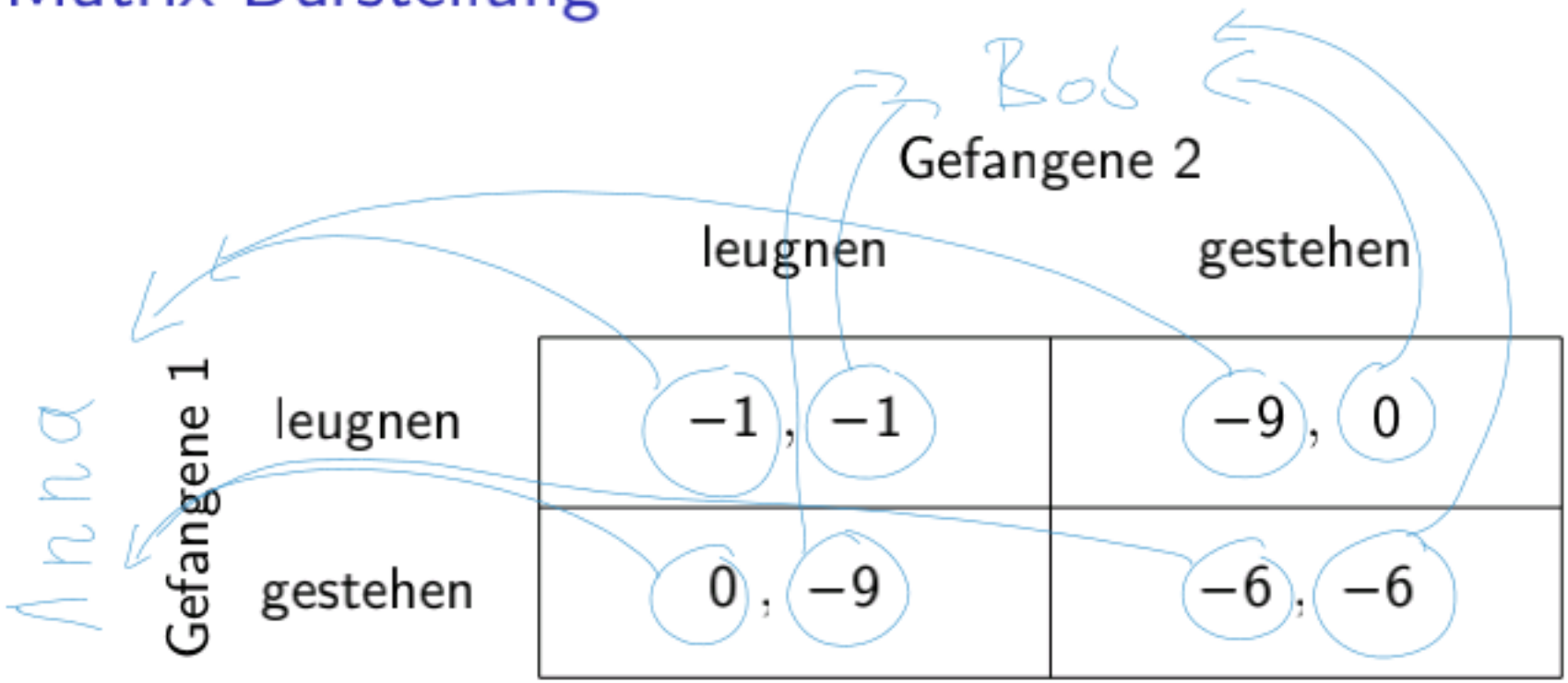
Je höher, desto besser.

Anna: $u(C) = 0 > u(A) = -1 > u(D) = -6 > u(B) = -9$

Bob: $U(B) = 0 > U(A) = -1 > U(D) = -6 > U(C) = -9$

Wir nennen diese Nutzenzahlen **ordinal**, da ihre einzige Aufgabe ist, die Zustände zu ordnen.

Bi-Matrix Darstellung



Die Zahlen in den Zellen der Bi-Matrix repräsentieren hier die **rationalen Präferenzen** der Spielerinnen.

Die jeweils linke Zahl steht für Gefangene 1 (Zeilenspielerin) und die jeweils rechte Zahl steht für Gefangene 2 (Spaltenspielerin).

Die Präferenzen sind: je länger Gefängnis, desto schlechter. Wenig eigene Zeit im Gefängnis ist einziges Ziel.

Analyse aus Sicht von Gefangener 1:

Angenommen Nr. 2 leugnet:

(1) kommt frei, falls sie gesteht und 1 Monat Gefängnis, falls sie leugnet.

$\Rightarrow$ gestehen besser.

Angenommen Nr. 2 gesteht:

(1) bekommt 6 Monate, falls sie gesteht und 9 Monate, falls sie leugnet.

$\Rightarrow$ gestehen besser.

Falls Gefangene 1 **rational**:

Gefangene 1 wird gestehen.

Analyse aus Sicht von Gefangener 2:

Gleiche Argumentation wie bei Gefangener 1

Falls Gefangene 2 **rational**:

Gefangene 2 wird gestehen.

Gefangenen Dilemma: Erwartungen an das Verhalten der anderen?

Im Gefangenen Dilemma ist es für die eine Gefangene besser zu gestehen, egal, wie sich die andere Gefangene entscheidet.

Deswegen ist es auch egal, welche Erwartungen die eine Gefangene an das Verhalten von der anderen Gefangenen hat.

Wir werden diese besonders starke Eigenschaft später allgemeiner als **dominante Strategie** definieren.

Die Lösung des Gefangenen Dilemmas

Die Lösung des Gefangenen Dilemmas ist die Antwort auf Frage 1 der Spieltheorie:

„Wie **werden** sich rationale Akteure verhalten?“

Unsere Analyse ergibt:

Beide Gefangenen gestehen.

Wie **sollten** sich rationale Akteure verhalten?

Mit Blick auf die im Titel gestellte **normative** Frage 2 der Spieltheorie gibt es mehrere Kriterien, welche wertegeleitet in einem Spielausgang erfüllt sein sollten.

Wir definieren hierfür das Kriterium der **Pareto Effizienz** auf der folgenden Folie.

Auch andere Kriterien (wie z.B. Gerechtigkeit) könnten natürlich gefordert werden.

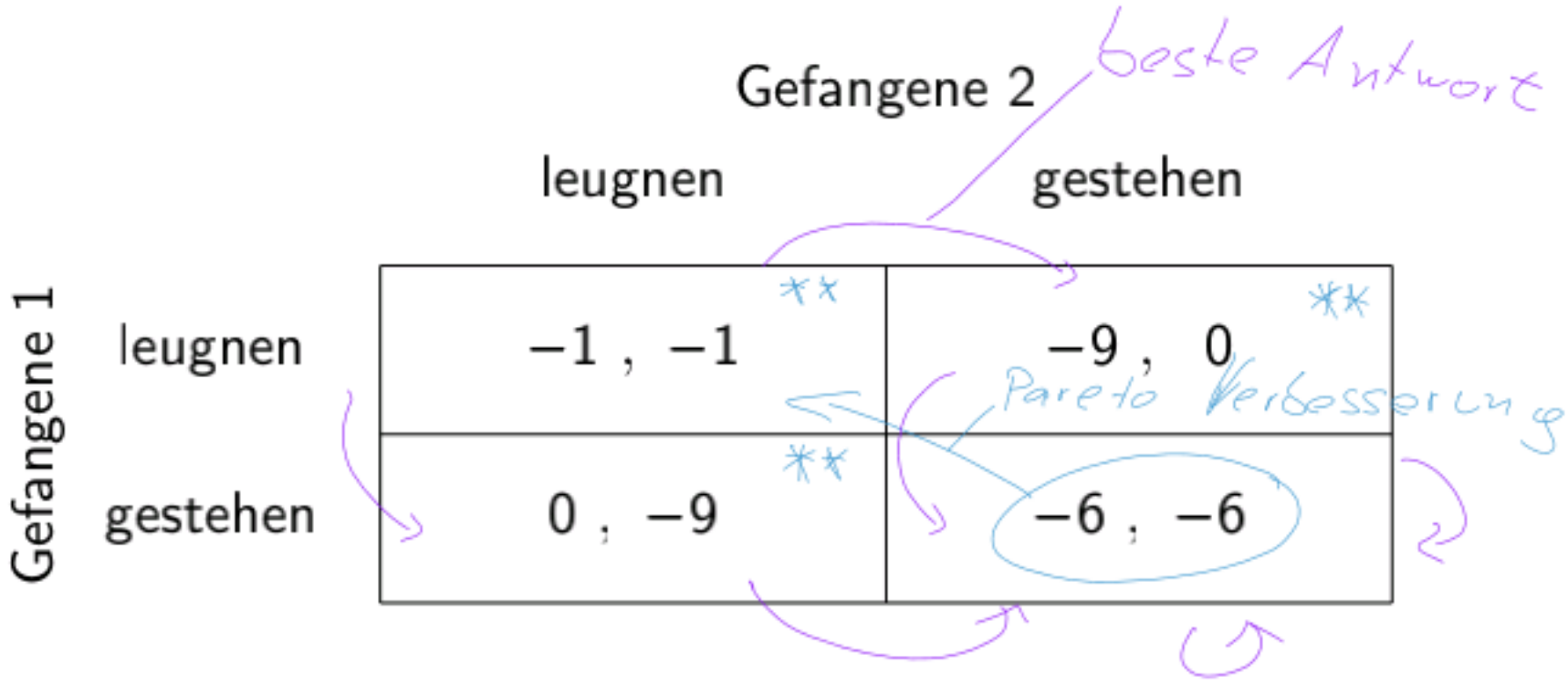
Pareto Effizienz

Ein Zustand (z.B. der Ausgang eines Spiels) ist Pareto effizient, falls niemand besser gestellt werden kann, ohne einer anderen Person zu schaden.

Aus der Sicht der Gemeinschaft sind pareto ineffiziente Ausgänge nicht wünschenswert.

Welche Spielausgänge des Gefangenen Dilemmas sind Pareto effizient?

Pareto effiziente Ausgänge im Gefangenen Dilemma?



Worin besteht nun das Dilemma der Gefangenen?

Drei der vier Ausgänge des Spiels, nämlich (leugnen, gestehen), (gestehen, leugnen) und (leugnen, leugnen) sind **Pareto effizient**.

Die rationale Lösung des Spiels ist aber ausgerechnet das einzige Pareto ineffiziente Ergebnis!

Individuelles rationales und egoistisches Verhalten ist also nicht immer zum Wohle aller.

Spieltheorie vs. allgemeine Gleichgewichtstheorie

Die klassische Marktheorie ist von folgenden Gedanken geprägt:

Adam Smith:

„It is not from the benevolence of the butcher, the brewer, or the baker, that we expect our dinner, but from their regard to their own interest.“

„By pursuing his own interest he frequently promotes that of the society more effectually than when he really intends to promote it.“

Arrow-Debreu (1. Wohlfahrtstheorem):

Marktgleichgewichte sind (Pareto-) effizient.

Mit dem Gefangenen Dilemma widerspricht die Spieltheorie der klassischen Auffassung.

Definition: Spiel in Normalform

Ein **Spiel in Normalform** spezifiziert

(1) die **Spieler:innen** $i = 1, \ldots, n$

(2) die **Strategien** $s_i \in S_i$ für jede:n Spieler:in $i = 1, \ldots, n$
wobei S_i die Menge aller möglichen Strategien bezeichnet
(Strategienraum für Spieler:in i)

(3) die **Auszahlungsfunktion** (payoff-function)
$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$ mit $u_i(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}$
(von Neumann-Morgenstern Nutzen)

Menge der möglichen Spielausgänge

$\Rightarrow \; G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$

G ist **endlich**, falls $n < \infty$ und $|S_i| < \infty$ für $i = 1, \ldots, n$.

Spielausgänge im Gefangenendilemma:

{(gestehen, gestehen), (gestehen, leugnen),

(leugnen, gestehen), (leugnen, leugnen)}

$= \{\text{gestehen, leugnen}\} \times \{\text{gestehen, leugnen}\}$

$S_A \qquad\qquad S_B$

$U_A : \underbrace{S_A \times S_B}_{\text{Def. Bereich}} \to \mathbb{R}$

Elfmeterspiel

(1) Spielerin 1: Torhüterin

Spieler 2: Schütze

Spielausgänge:

$\{ll, lr, rl, rr\}$

(3) (u_1, u_2): $(1,0), (0,1), (0,1), (1,0)$

(2) Strategien

$S_1 = \{$ springe links, springe rechts $\} \rightsquigarrow \{l, r\}$

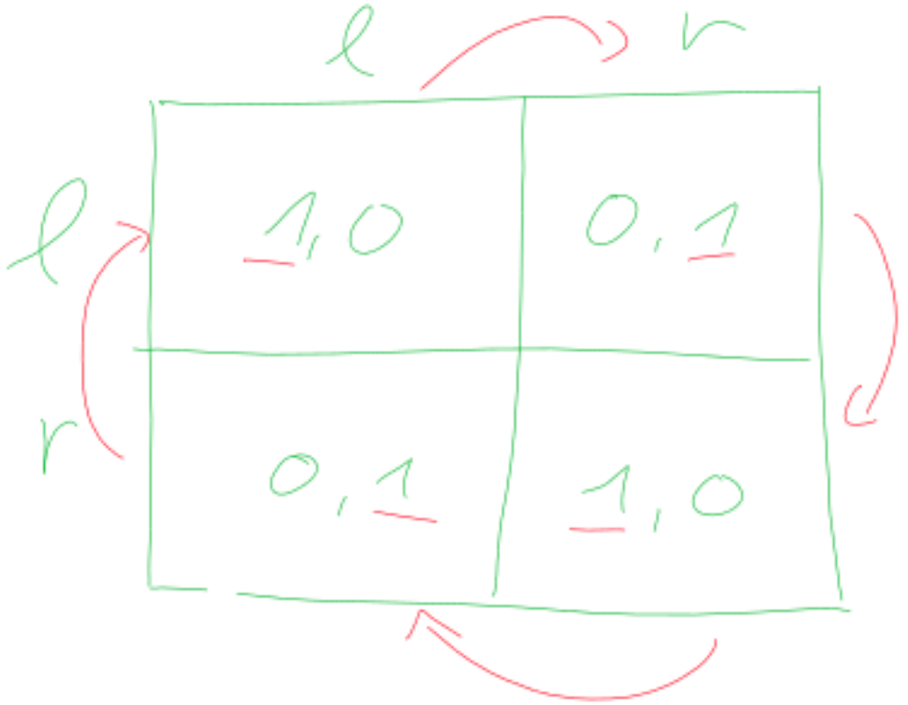
$S_2 = \{$ schieße links, schieße rechts $\}^* = \{l, r\}$

* aus Sicht von 1

Auszahlungsmatrix Elfmeterspiel

(2)
Schütze

(1)
Torhüterin



Cournot Oligopol

(1) Spieler:innen Firma 1 bis n , $n \in \mathbb{N}$

(2) Strategien $S_i = \mathbb{R}_{\geq}$ s_i: Ausbringungsmenge

(3) Auszahlungsfunktion: Gewinn (Erlös − Kosten)

inverse Nachfragefunktion (Menge → Preis) $P: \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_{\geq}$

$P(Q) = 34 - Q$, falls $Q \leq 34$, $P(Q) = 0$, falls $Q > 34$

Q: Gesamtmenge $Q = \sum_{i=1}^{n} s_i$ Kosten $C(s_i) = 4 \cdot s_i$

Gewinn $\Pi_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = P(s_1 + s_2 + \dots + s_n)\, s_i - 4 s_i$

Abkürzungen

Um bei $n > 2$ die Schreibweise zu vereinfachen, benutzen wir häufig:

$$s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

$$S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$$

→ Cournot-Oligopol: $\Pi_i(s_i, s_{-i}) = P(s_i, s_{-i})s_i - q \cdot s_i$

Grundlegende Begriffe: Dominiertheit

In manchen Spielen gibt es Strategien, die keine gute Wahl für den/die entsprechende Spieler:in sind.

Wenn eine Strategie s_i' schlechter für i ist als Strategie s_i'' **egal, wie sich die anderen Spieler:innen entscheiden**, dann wird die schlechtere Strategie s_i' durch die bessere Strategie s_i'' **dominiert**.

Wenn eine Strategie s_i'' alle anderen Strategien von i dominiert, dann ist die Strategie s_i'' **dominant**.

Ein:e rationale Spieler:in wählt keine dominierte Strategie, auch wenn sie nicht weiß, wie die anderen Spieler:innen entscheiden.

Gefangenen Dilemma

(2)

(1)		e	g
	l	-1, -1	-9, 0
	g	0, -9	-6, -6

→ leugnen ist dominiert

→ gestehen ist dominant

gestehen ist besser als leugnen

egal wie sich der/die andere entscheidet

Cournot Duopol ($n=2$)

$S_i = \mathbb{R}_+$

$\pi_1(s_1, s_2) = (34 - s_1 - s_2)\, s_1 - 4 \cdot s_1$ falls $s_1 + s_2 \leq 34$

$\pi_1(s_1, s_2) = 0 \cdot s_1 - 4 s_1$ falls $s_1 + s_2 > 34$

Vorschlag: $s_1' \geq 34$ (dominierte Strategie)

$s_1'' = 0$ (dominierende Strategie)

$s_1'' = 0$ ist aber keine dominante Strategie, da für $s_2 = 0$ und $s_1 = 1$:

$\pi_1(1,0) = 33 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 29 > 0$

$\pi_1(s_1', s_2) = -4 s_1' < 0 = \pi_1(s_1'', s_2)$

Definition: schwach & strikt dominiert / dominant

Es seien s_i' und s_i'' mögliche Strategien von Spieler:in i.

s_i' heißt **schwach dominiert von** s_i'', falls für alle $s_{-i} \in S_{-i}$ gilt:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \leq u_i(s_i'', s_{-i})$$

und $u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})$ für mindestens ein $s_{-i} \in S_{-i}$.

s_i' heißt **strikt** dominiert, falls alle obigen Ungleichungen strikt sind.

s_i'' heißt schwach/strikt **dominant**, falls jede andere Strategie von s_i'' schwach/strikt dominiert wird.

Beispiel 1 zu strikt dominiert

mitte ist nicht dominant, da links besser ist, falls (1) unten wählt

rechts ist für (2) dominiert durch mitte.

(1) \ (2)	links	mitte	rechts
oben	1 , 0	1 , 2	0 , 1
unten	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Wenn (1) weiß, dass (2) rational ist, dann weiß (2), dass (1) nicht rechts spielen wird. In dem kleineren Spiel ist dann unten durch oben dominiert.

Beispiel 2 zu iteriert strikt dominiert

Schritt 3

Schritt 1

		(2)	
	links	mitte	rechts
oben	1 , 0	1 , 2 *	0 , 1
(1) Schritt 2			
unten	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Iterierte Elimination strikt dominierter Strategien (IEsdS)

Die iterierte Elimination strikt dominierter Strategien führt in Beispiel 2 zu der einzig möglichen Lösung

(oben, mitte)

unter der Voraussetzung: **common knowledge of rationality**.

1. Jede:r weiß, dass jede:r andere rational ist.
2. Jede:r weiß, dass 1. wahr ist.
3. Jede:r weiß, dass 2. wahr ist.

   ...

Grundlegende Begriffe: Beste Antwort

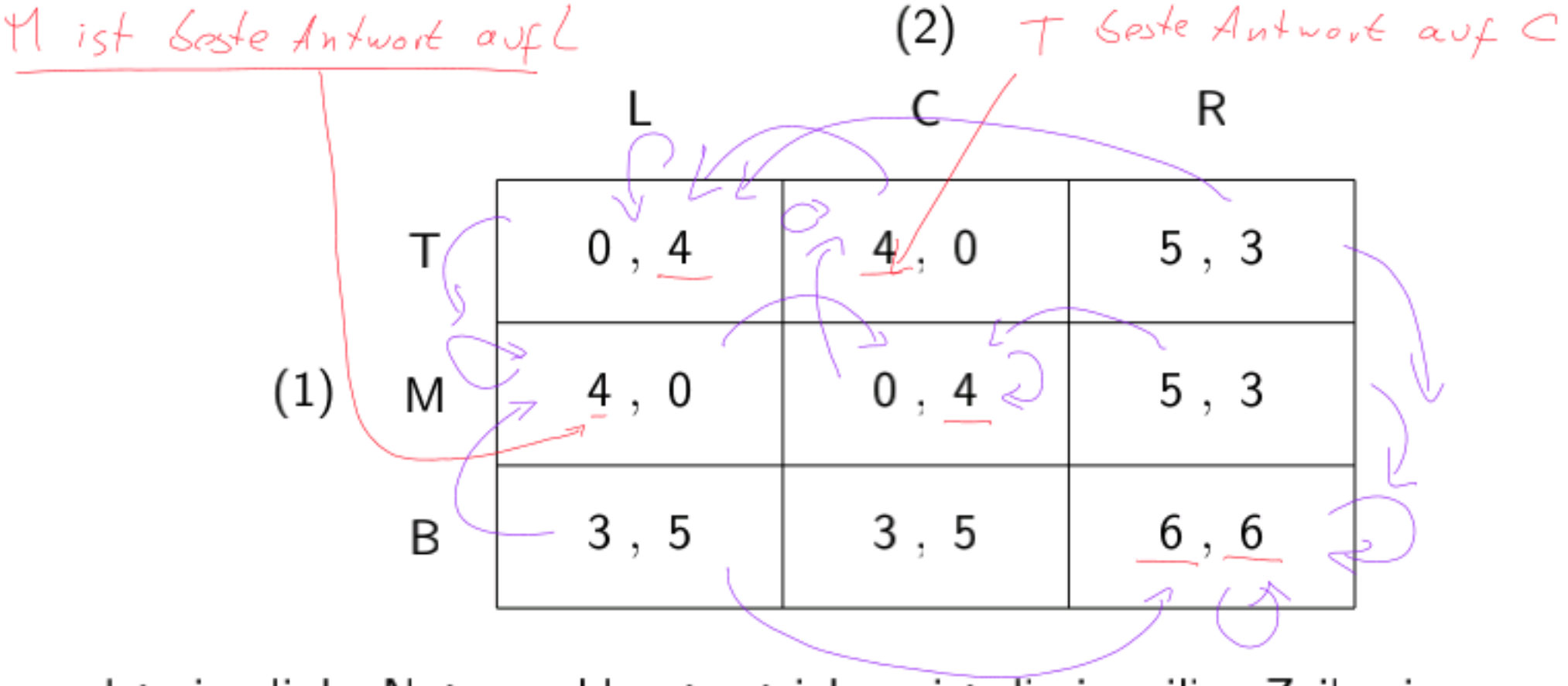
Wenn eine Spieler:in davon ausgehen kann, dass sich alle anderen für eine ganz bestimmte Strategie entscheiden, kann diese:r Spieler:in in dieser Situation die beste Strategie gemäß seiner/ihrer Präferenzen wählen.

Diese Strategie nennen wir **beste Antwort** (auf die ganz bestimmten Strategien, für die sich die anderen entscheiden).

Je nachdem, wie sich die anderen entscheiden, kann die eigene beste Antwort also wechseln.

Die beste Antwort ist also immer in Bezug auf eine Entscheidung der anderen definiert.

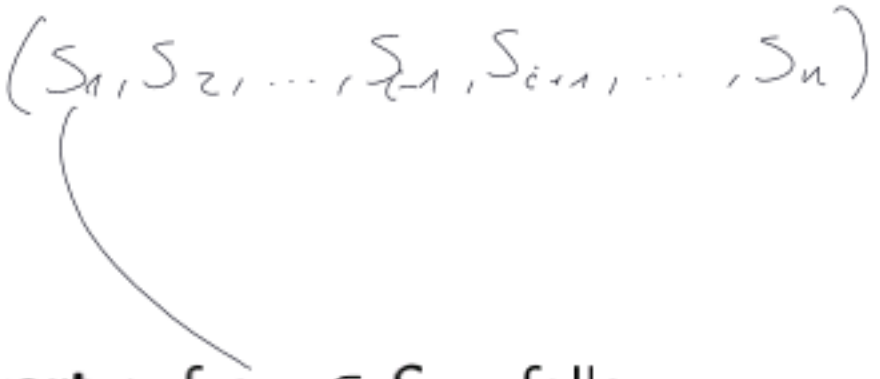
Grundlegende Begriffe: Beste Antworten – Beispiel 3



Ist eine linke Nutzenzahl unterstrichen, ist die jeweilige Zeile eine **beste Antwort** auf die entsprechende Spalte.

Ist eine rechte Nutzenzahl unterstrichen, ist die jeweilige Spalte eine **beste Antwort** auf die entsprechende Zeile.

Definition: Beste Antwort



Die Strategie $\hat{s}_i \in S_i$ heißt **beste Antwort** auf $s_{-i} \in S_{-i}$, falls

$$u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ für alle } s_i \in S_i \ .$$

Angenommen, die Spieltheorie liefert für eine Klasse von Spielen eine eindeutige Voraussage („Lösung“) $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, dann sollte gelten:

Für jede:n Spieler:in i ist die Wahl von s_i^* rational, gegeben s_{-i}^*.

$\rightarrow$ s_i^* ist eine beste Antwort auf s_{-i}^* für alle i.

Grundlegende Begriffe: Nash Gleichgewicht

Nash, John F. "Equilibrium points in n-person games." *Proceedings of the national academy of sciences* 36.1 (1950): 48-49.

Ein Profil von Strategien ist ein **Nash Gleichgewicht** (**NGG**), falls für jede:n Spieler:in die eigene Strategie eine beste Antwort auf die Strategien der jeweils anderen Spieler:innen ist.

In einem Nash Gleichgewicht hat kein:e Spieler:in den Anreiz von ihrer Entscheidung abzuweichen.

Definition: Nash Gleichgewicht

Ein Profil von Strategien $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ heißt

Nash Gleichgewicht des Spiels $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$,

falls für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ für alle $s_i \in S_i$.

Anmerkungen zu Nash Gleichgewicht

s_i' strikt dominiert $\Rightarrow$ $u_i(s_i'', s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-i}^*)$

$\Rightarrow$ s_i' keine beste Antwort auf s_{-i}^*

- Eine streng dominierte Strategie kann kein Teil eines NGGs sein.
- Eine dominante Strategie muss ein Teil eines NGGs sein.
- s_i^* löst $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$
- s_i^* ist beste Antwort auf s_{-i}^* für alle $i = 1, \ldots, n$

s_i^* dominant: $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ für alle $s_i' \in S_i$ für alle $s_{-i} \in S_{-i}$

also insbesondere auch für $s_{-i} = s_{-i}^*$

$\Rightarrow$ s_i^* beste Antwort auf s_{-i}^*

Grundlegende Begriffe: Nash Gleichgewicht – ein Beispiel



		(2) L	(2) C	(2) R
(1)	T	0 , $\underline{4}$	$\underline{4}$, 0	5 , 3
	M	$\underline{4}$, 0	0 , $\underline{4}$	5 , 3
	B	3 , 5	3 , 5	$\underline{6}$, $\underline{6}$

Die Strategienkombination (B, R) ist ein **Nash Gleichgewicht**.

Beispiel 4: 1Live oder eldoradio*?

Anne und Ben arbeiten im gleichen Zimmer an ihren Mikroaufgaben und hören dabei Radio.

Beide finden es besser den gleichen Sender zu hören als zwei verschiedene Sender gleichzeitig.

Anne bevorzugt 1Live gegenüber eldoradio* und Ben bevorzugt eldoradio* gegenüber 1Live.

		Ben: 1L	Ben: e*
Anne	1L	2 , 1	0 , 0
Anne	e*	0 , 0	1 , 2

Beispiel 5: Elfmeter (ohne Anlauf)

Strategien von Schützin (Spielerin 1):

$\{\text{schieße nach links, schieße nach rechts}\} \to \{l, r\}$

Strategien von Torwart (Spieler 2):

$\{\text{springe nach links, bleibe stehen, springe nach rechts}\} \to \{l, m, r\}$

Schützin \ Torwart	l	m	r
r	1 , 0	1 , 0	0 , 1
l	0 , 1	1 , 0	1 , 0

Zwei Schlussfolgerungen

Proposition A

Falls das Spiel $G = \{\ldots\}$ endlich ist und durch iterierte Elimination strikt dominierter Strategien nur $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ übrig bleibt, dann ist $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ das einzige Nash Gleichgewicht.

Proposition B

Falls $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash Gleichgewicht des Spiels $G = \{\ldots\}$ ist, so muss $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ nach iterierter Elimination strikt dominierter Strategien übrig bleiben.

Beweis B

Sei $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ ein Nash Gleichgewicht.

Angenommen s^* überlebt nicht den Eliminationsprozess.

Dann sei s_i^* die erste Strategie, die eliminiert wird.

Dann muss s_i^* strikt dominiert sein, d.h. es gibt eine Strategie $s_i \in S_i$, sodass $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i})$ für alle s_{-i}, insbesondere für $s_{-i} = s_{-i}^*$.

Dann gilt: $u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$.

Aber dies widerspricht der Annahme, dass s^* ein Nash Gleichgewicht ist.

Beweis A

Angenommen, $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ sei die einzige überlebende Strategienkombination und s^* sei kein Nash Gleichgewicht.

Dann gibt es einen Spieler i mit einer Strategie s_i, so dass gilt:

$$u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \qquad (*)$$

Nach Annahme wurde s_i irgendwann eliminiert, d.h. es gibt eine Strategie $s_i' \in S_i$, sodass $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in S_{-i}$, die zu diesem Zeitpunkt noch nicht eliminiert sind.

Da s_{-i}^* per Annahme nie eliminiert wird: $u_i(s_i', s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$.

Fall I: $s_i' = s_i^*$; kann nicht sein, Widerspruch zu $(*)$.

Fall II: $s_i' \neq s_i^*$; dann wird s_i' irgendwann durch s_i'' eliminiert.

Wiederhole Beweis mit s_i' anstelle von s_i und mit s_i'' anstelle von s_i'.

Da S_i endlich: irgendwann Widerspruch.

s_i' ist durch s_i'' schwach dominiert, falls

Strikt

$$u_i(s_i', s_{-i}) \leq u_i(s_i'', s_{-i}) \quad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}$$

↑ strikt für mindestens ein s_{-i}

Beispiel 6

○ wird für (1) durch m schwach dominiert!

Spielerin 1 \ Spieler 2	l	r
o	1 , 2	0 , 1
m	1 , 0	1 , 1
u	0 , 1	2 , 0

Experiment: Beauty Contest

Nagel, Rosemarie. "Unraveling in guessing games: An experimental study." The American economic review 85.5 (1995): 1313-1326.

Alle Spieler:innen (Anzahl n) müssen simultan eine ganze Zahl zwischen 1 und 100 nennen.

Nachdem sich alle entschieden haben, wird der Durchschnitt $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$ berechnet.

Es gewinnt das Spiel, wer $\frac{2}{3}$ von $\bar{s}$ am nächsten ist.

Schlüsselwörter in Kapitel 1.1

- statisches Spiel unter vollständiger Information
- Gefangenen Dilemma
- Bi-Matrix / Auszahlungsmatrix
- rationale Spieler
- Spiel in Normalform
- (iteriert) strikt / schwach dominiert / dominant
- Common knowledge of rationality
- Beste Antworten
- Nash Gleichgewicht

Ökonomische Anwendungen

Experiment: Team-Spiel

Team: vier Personen, die sich nicht kennen. Alle Personen investieren gleichzeitig jeweils zwischen null und 20 Stunden in das Projekt.

Der Wert des Projektes hängt von der Summe aller Stunden ab: $4\sqrt{X+Y}$, wobei

- X: Anzahl der von dir investierten Stunden
- Y: Gesamtzahl der investierten Stunden der anderen

Dieser Wert ist in Einheiten von Stunden Freizeit gemessen.

Nettowert des Team-Projektes für dich:

$$4\sqrt{X+Y} - X$$

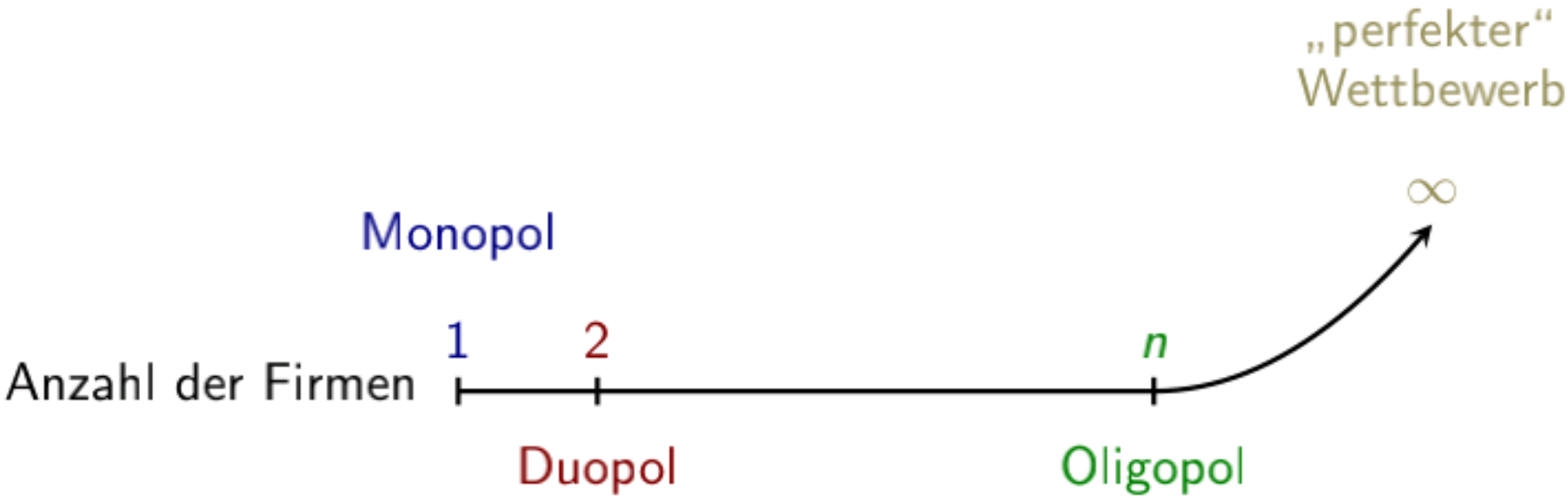
Wie viele Stunden X Deiner Freizeit möchtest Du in das Projekt investieren?

Oligopol:

- Mehr als eine Firma ist am Markt aktiv.
- Es sind aber so wenige Firmen am Markt aktiv, dass jede einzelne Firma einen gewissen Einfluss auf den Marktpreis hat.

Fokus dieser Vorlesung:

2 Firmen (Duopol)



Monopol & Wettbewerb: Extrem- oder Idealfälle

Duopol bzw. Oligopol: realitätsnaher Fall

Duopol: fünf Fälle

Entscheidungsreihenfolge	Entscheidungsvariable: Preis	Entscheidungsvariable: Menge
sequentiell	**Preisführer** (*MC* konstant: → Bertrand)	**Stackelberg**
simultan	**Bertrand**	**Cournot**

Kapitel 2

Kapitel 1

Kooperation der Firmen: **Kartell**

Einfache Parametrisierung

Inverse Nachfrage:

$$P(q_1 + q_2) = \max\{34 - q_1 - q_2, 0\}$$

Lineare Kostenfunktionen:

$$c(q_i) = 4 \cdot q_i \text{ für } i = 1, 2$$

Die Mengenentscheidungen beider Firmen beeinflussen den Marktpreis.

Somit hängt die Entscheidung der einen Firma von der Entscheidung der jeweils anderen Firma ab.

Referenzfall: Monopol

$n = 1$

Es tritt nur eine Firma am Markt auf.

$\Pi^M(q) = -4 \cdot q$ falls $q > 34$

Das Maxmimierungsproblem lautet demnach:

$$\max_{\substack{q \geq 0 \\ q \leq 34}} \underbrace{(34 - q)}_{P(q)} \cdot q - 4 \cdot q = (30 - q)q$$

Erlös

Bedingung erster Ordnung:

$$-1 \cdot q + 30 - q = 30 - 2q \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow q^M = 15$$

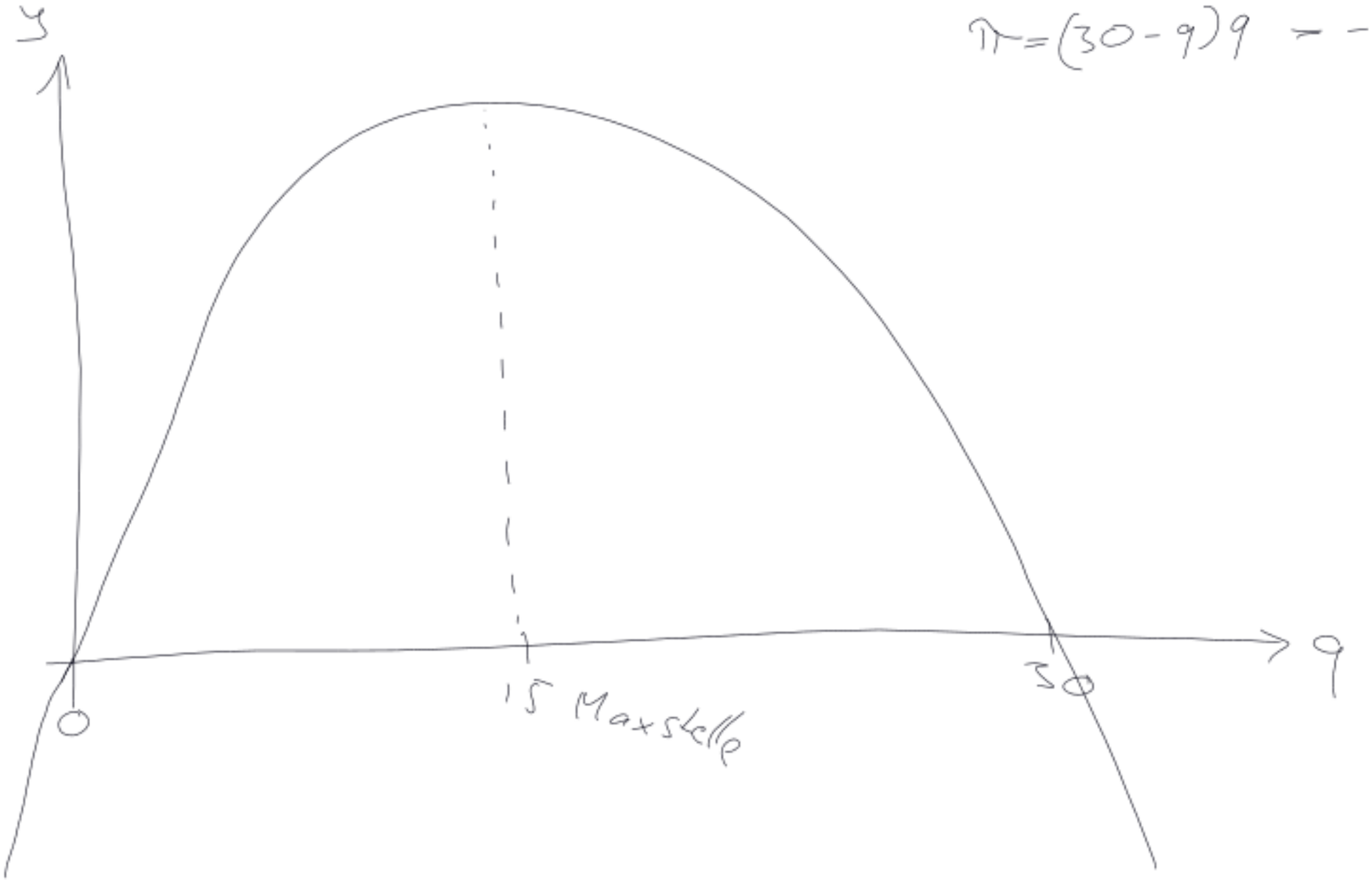
Die Firma erzielt am Markt den Preis:

$$P(15) = 34 - 15 = 19$$

und generiert einen Gewinn in Höhe von:

$$(34 - 15)15 - 4 \cdot 15 = 19 \cdot 15 - 4 \cdot 15 = 15 \cdot 15 = 225$$

$\pi = (30-q)q = -q^2 + 30q$



Referenzfall: Wettbewerbsmarkt

$$\max_{q \geq 0} \quad p \cdot q - 4 \cdot q = (p-4)q$$

$$\begin{cases} p > 4: & q \nearrow \infty \\ p = 4: & q \geq 0 \\ p < 4: & q = 0 \end{cases}$$

Lineare Kostenfunktionen $c(q) = 4 \cdot q$

$\Rightarrow$ Grenzkosten $MC(q) \equiv 4$

Gleichgewichtsbedingung:

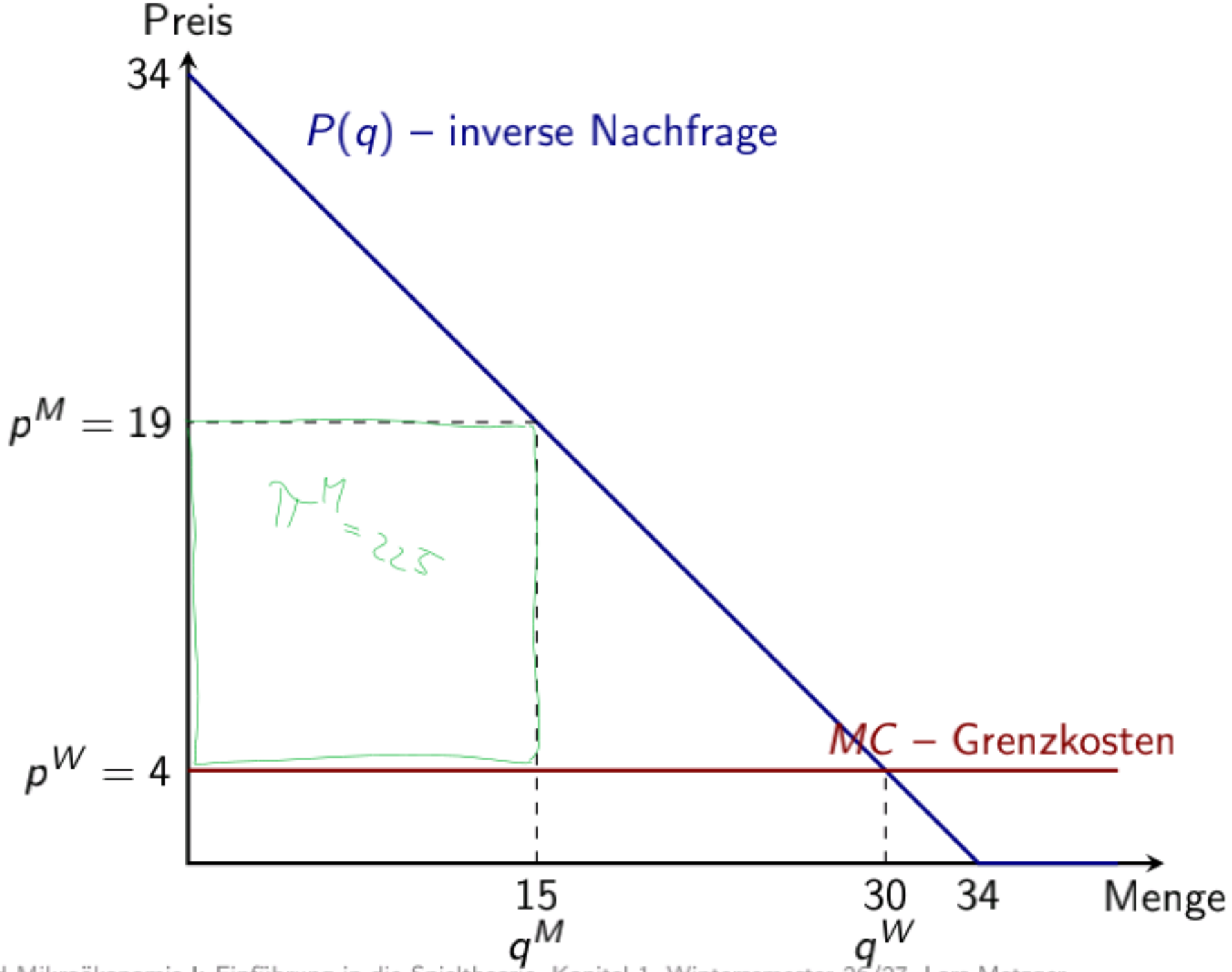
$$p^* = MC$$

$\Rightarrow$ Gleichgewicht:

$$P(q^*) = 4 \rightsquigarrow 34 - q^{W} = 4 \Leftrightarrow q^{W} = 30$$

$$\Rightarrow \Pi(q^{W}) = (4-4)q^{W} = 0$$

Graphische Darstellung der Referenzfälle



Cournot

Entscheidungsvariable: Menge

Entscheidungsreihenfolge: simultan

$\rightarrow$ Spiel in Normalform

$\rightarrow$ Lösung: Nash Gleichgewicht

Cournot-Duopol

Zwei Firmen legen simultan ihre jeweiligen Produktionsmengen q_1 und q_2 fest.

Maximierungsprobleme der Firmen:

$$\max_{q_1 \geq 0} (34 - q_1 - q_2) \cdot q_1 - 4 \cdot q_1 = (30 - q_1 - q_2) q_1$$

$$\max_{q_2 \geq 0} (34 - q_1 - q_2) \cdot q_2 - 4 \cdot q_2 = (30 - q_1 - q_2) q_2$$

- Die Entscheidung der jeweils anderen Firma beeinflusst die eigene Zielfunktion.
- Simultane Entscheidung: Die Firmen kennen die jeweils anderen Entscheidungen noch nicht!

Optimale Entscheidung von F_1 auf die Menge $q_2 \geq 0$

$$\max_{q_1 \geq 0} \; (30 - q_1 - q_2) q_1$$

$(q_1 \leq 34)$

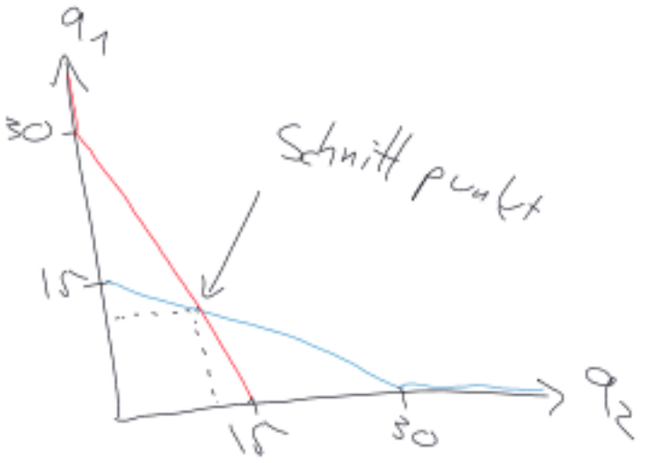
analog: $q_2(q_1) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2} q_1 & q_1 \leq 30 \\ 0 & q_1 > 30 \end{cases}$

BEO: $-1 \cdot q_1 + 30 - q_1 - q_2 = 30 - 2q_1 - q_2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad q_1 = 15 - \frac{1}{2} q_2$ beste Antwort von F_1 auf q_2

Reaktionsfunktion

$$q_1(q_2) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2} q_2 & \text{falls } q_2 < 30 \\ 0 & \text{falls } q_2 > 30 \end{cases}$$



$q_1(q_2)$ Reaktionsfunktion von F_1 auf q_2

$q_2(q_1)$ — " — F_2 auf q_1

$$15 - \frac{1}{2} q_2^* = q_1^*$$

$$15 - \frac{1}{2} q_1^* = q_2^*$$

Nash Gleichgewicht (q_1^*, q_2^*):

$$q_1(q_2^*) = q_1^* \qquad q_2(q_1^*) = q_2^*$$

$$15 - \frac{1}{2}\left(15 - \frac{1}{2} q_1^*\right) = q_1^*$$

$$\frac{1}{2} 15 + \frac{1}{4} q_1^* = q_1^*$$

$$\frac{1}{2} 15 = \frac{3}{4} q_1^*$$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{4}{3} \frac{1}{2} 15 = 10$$

$$\Rightarrow q_2^* = 15 - \frac{1}{2} 10 = 10$$

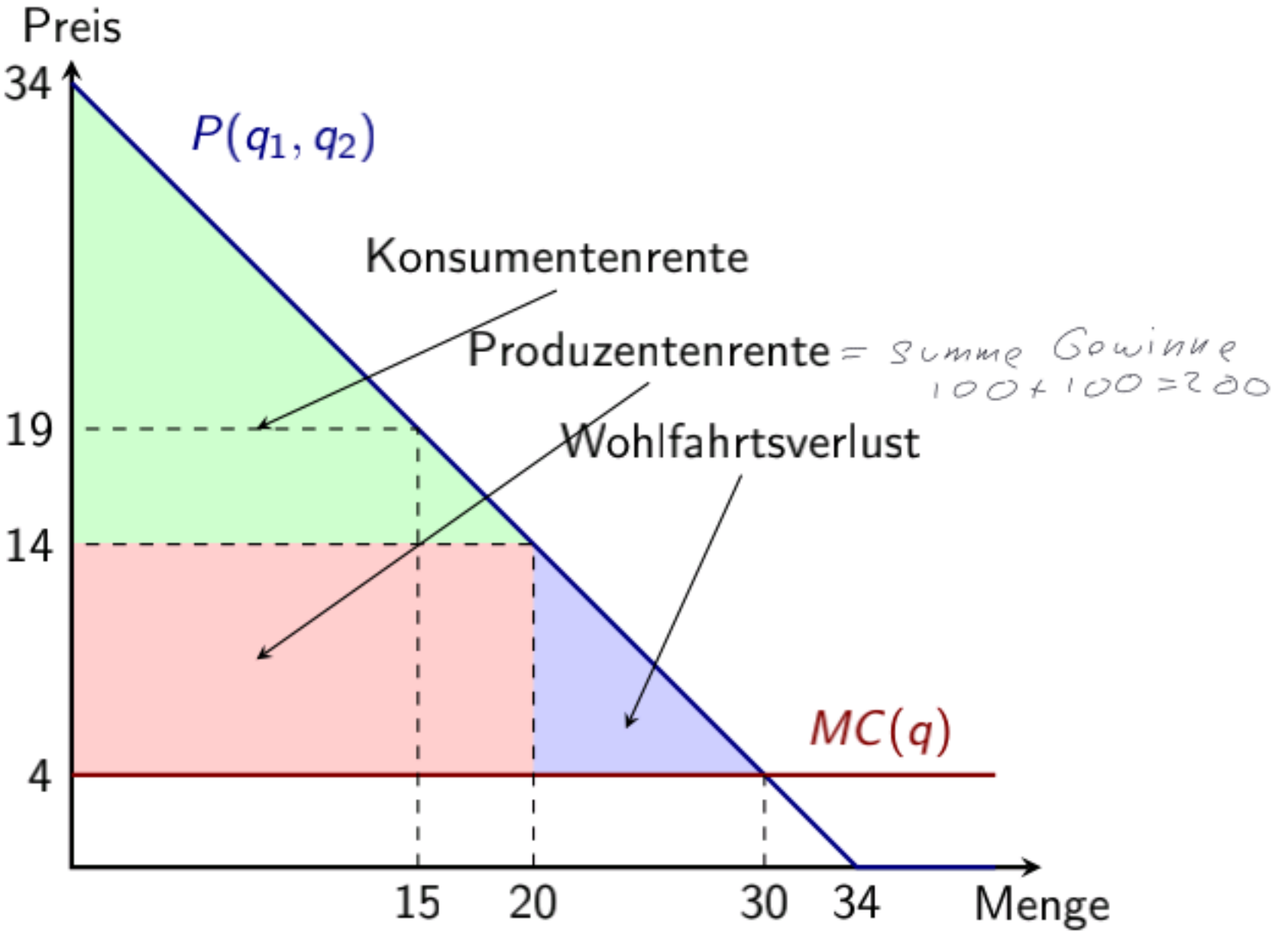
Gesamtmenge $= 10 + 10 = 20$

Preis $= 14$

Gewinn $\Pi_i(10,10) = 14 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 100$

2. Gewinn $= 200$

Wohlfahrtsanalyse Cournot Duopol



Iterative Elimination strikt dominierter Strategien im Cournot Duopol

Schritt 1:

Die Monopolmenge $q^M = 15$ dominiert jede größere Menge strikt.

Schritt 2:

Gegeben, dass keine Firma $q_i > 15$ wählt, dominiert die Menge $\frac{1}{2}q^M = 7.5$ jede kleinere Menge iterativ strikt.

Schritt 3:

Gegeben, dass keine Firma $q_i < 7.5$ wählt, dominiert die Menge $\frac{3}{4}q^M = 11.25$ jede größere iterativ strikt.

usw.

Wird dies unendlich oft iteriert, konvergieren die obere und untere Schranke gegen die Cournot-Menge $q^C = 10$. (ohne Beweis)

Schritt 1:

$$\pi_1(15, q_2) > \pi_1(q_1, q_2)$$

$$(30 - 15 - q_2)\,15 > (30 - q_1 - q_2)\,q_1$$

$$(15 - q_2)\,15 > (30 - q_1 - q_2)\,q_1$$

$$(15 - q_2)\,15 - (15 - q_2)\,q_1 > (30 - q_1 - q_2)\,q_1 - (15 - q_2)\,q_1$$

$$(15 - q_2)\underbrace{(15 - q_1)}_{<0} > \underbrace{(15 - q_1)}_{<0}\,q_1 \quad | : (15 - q_1)$$

$$15 - q_2 < q_1 \quad \checkmark$$

$\pi_1(q_1, q_2) = (30 - q_1 - q_2)\,q_1$

für alle $q_2 \geq 0$

für alle $q_1 > 15$

Alternativ

$$\left.\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1}\right|_{q_1 = 15} \leq 0$$

für alle $q_2 \geq 0$

Schritt 2

$\pi_1\left(\frac{15}{2}, q_2\right) > \pi_1(q_1, q_2)$ für alle $0 \le q_2 \le 15$ / für alle $0 \le q_1 \le \frac{15}{2}$

$4 \cdot \frac{15}{2}$

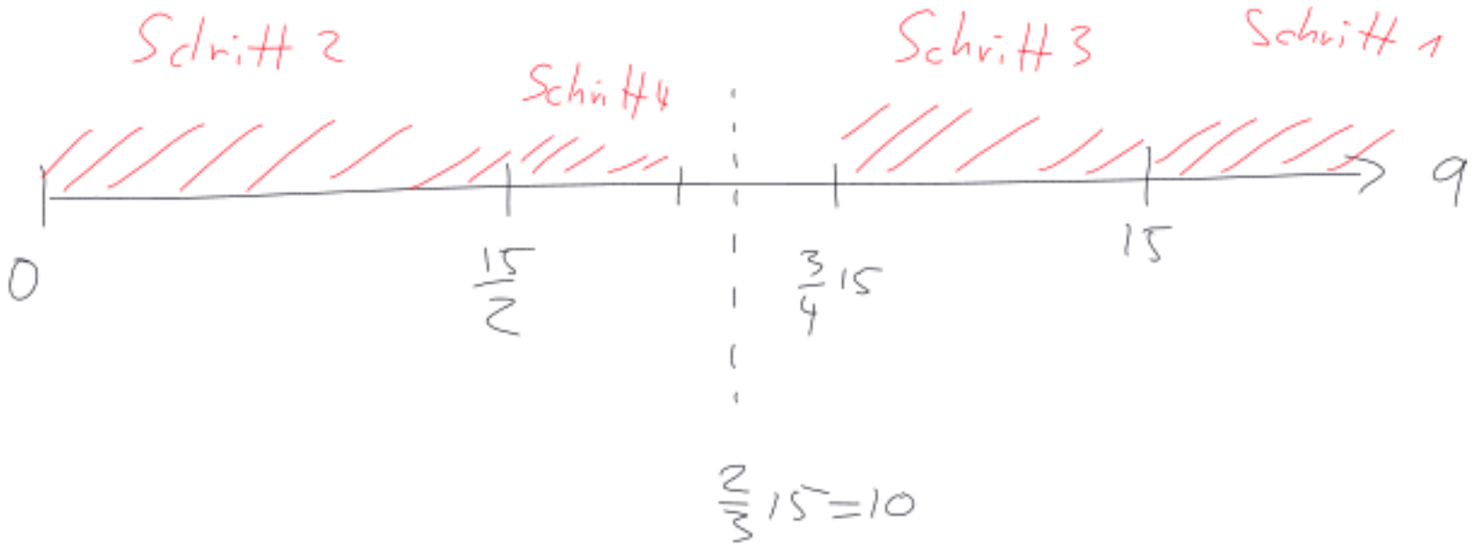
$$\left(30 - \frac{15}{2} - q_2\right)\frac{15}{2} > (30 - q_1 - q_2)\,q_1$$

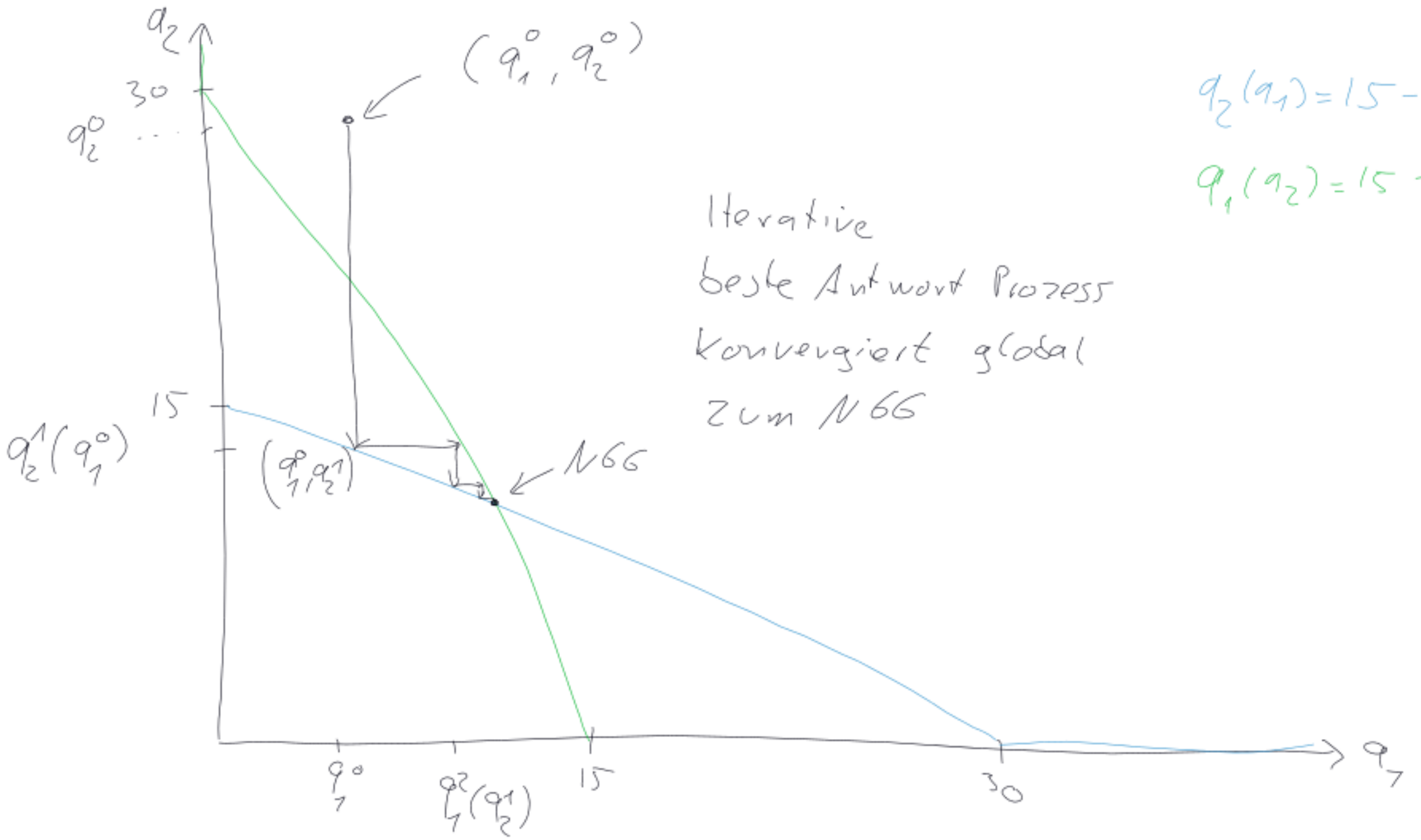
$4 \cdot \frac{15}{2}$

$$\left(3\cdot\frac{15}{2} - q_2\right)\frac{15}{2} > (30 - q_1 - q_2)\,q_1 \quad \Big| -\left(3\tfrac{15}{2} - q_2\right)q_1$$

$$\left(3\cdot\frac{15}{2} - q_2\right)\underbrace{\left(\frac{15}{2} - q_1\right)}_{>0} > \underbrace{\left(\frac{15}{2} - q_1\right)}_{>0} q_1 \quad \Big| :\left(\frac{15}{2} - q_1\right)$$

$$\underbrace{3\cdot\frac{15}{2} - q_2}_{\ge \frac{15}{2}} > q_1 \quad \checkmark$$


Schritt 2
Schritt 4
Schritt 3
Schritt 1
0
$\frac{15}{2}$
$\frac{3}{4}15$
15
9
$\frac{2}{3}15=10$



$q_2(q_1) = 15 - \frac{1}{2} q_1$

$q_1(q_2) = 15 - \frac{1}{2} q_2$

Iterative
beste Antwort Prozess
konvergiert global
zum NGG

Kartell

Zusammenschluss von Firmen, die im gemeinsamen Interesse handeln.

Welche Mengen q_1 und q_2 müssten die Firmen wählen, um die Summe ihrer Gewinne zu maximieren?

$$\max_{q_1,q_2 \geq 0} \underbrace{P(q_1+q_2)\cdot q_1 - 4\cdot q_1}_{\pi_1} + \underbrace{P(q_1+q_2)\cdot q_2 - 4\cdot q_2}_{\pi_2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{q_1,q_2 \geq 0} P(q_1+q_2)\cdot(q_1+q_2) - 4\cdot(q_1+q_2)$$

Monopol: $\max_{Q \geq 0} (P(Q)-4)\,Q$

Es kommt nur auf die Summe $q_1 + q_2$ an!

Die Gewinnmaximierende Ausbringungsmenge kennen wir bereits:

die Monopolmenge $q_1 + q_2 = q^M = 15$!

Kartell: Kollusionsmenge = Monopolmenge

Alle Kombinationen q_1 und q_2 mit $q_1 + q_2 = 15$ maximieren den gemeinsamen Gewinn.

Bei der Menge $q_1 + q_2 = 15$ entsteht der Marktpreis

$$P(q_1 + q_2) = 34 - 15 = 19 \ .$$

Demnach haben Firmen 1 und 2 folgende Gewinne:

$$\pi_1(q_1, q_2) = 19 \cdot q_1 - 4 \cdot q_1 = 15 \cdot q_1$$

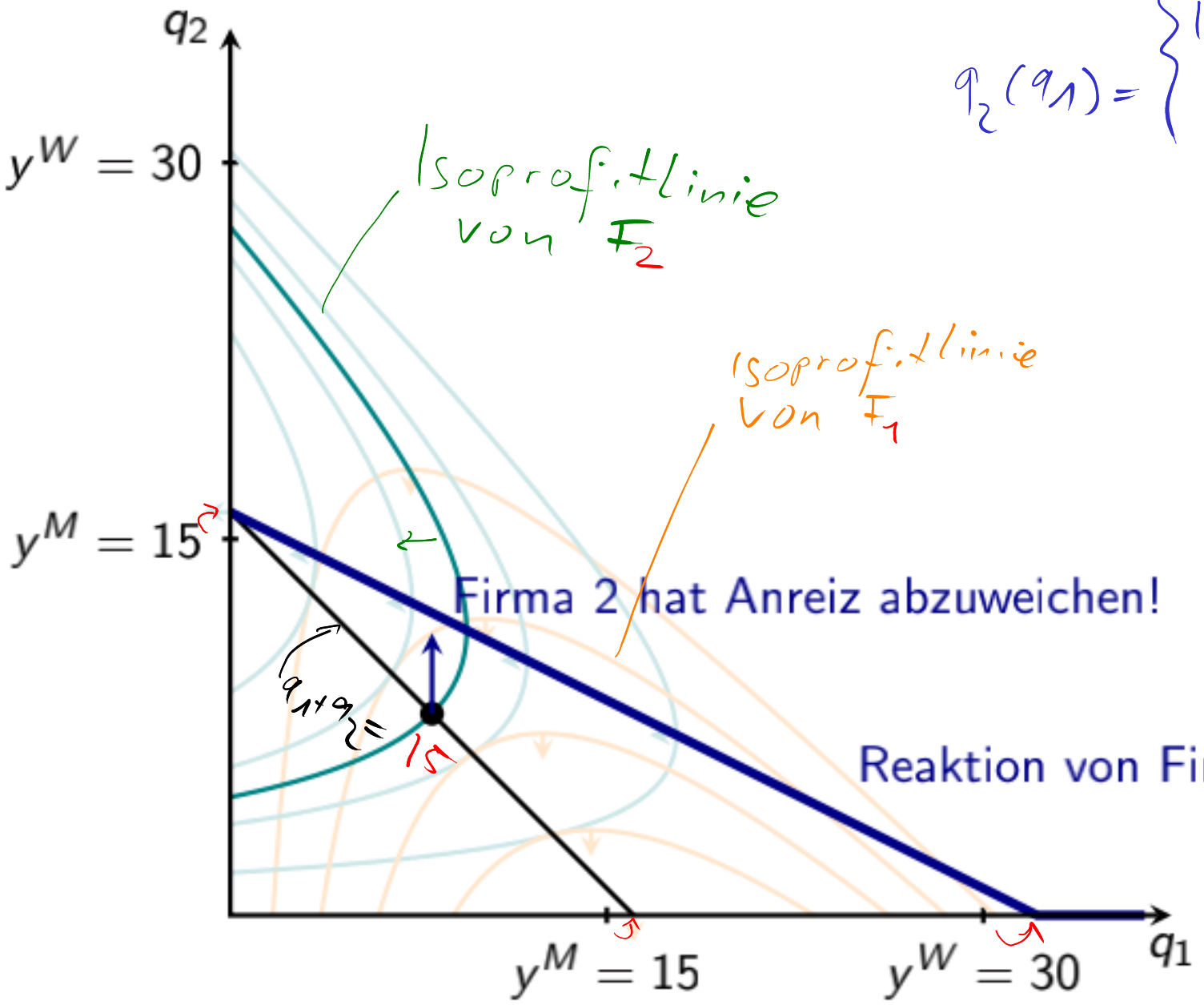
$$\pi_2(q_2, q_1) = 19 \cdot q_2 - 4 \cdot q_2 = 15 \cdot q_2$$

Die Summe der Gewinne beträgt $15 \cdot (q_1 + q_2) = 15 \cdot 15 = 225$

Bei gleicher Aufteilung des Marktes mit $q_1 = q_2 = 7.5$, erzielt jede Firma also einen Gewinn von 112.5 .

Kartell: Firmen haben Anreize, abzuweichen

$$q_2(q_1) = \begin{cases} 15 - \frac{1}{2} q_1, & q_1 \leq 30 \\ 0, & q_1 > 30 \end{cases}$$



Bertrand

Entscheidungsvariable: Preis

Entscheidungsreihenfolge: simultan

$\rightarrow$ Spiel in Normalform

$\rightarrow$ Lösung: Nash Gleichgewicht

Preiswettbewerb

Im Preiswettbewerb wählen die Firmen einen Preis für das angebotene Produkt.

Für $Q = q_1 + q_2$:

Inverse Nachfrage $P(Q) = 34 - Q$

$$\rightarrow D(p) = 34 - p$$

Wie modellieren wir die Nachfragekurve bei zwei verschiedenen Preisen p_1 und p_2?

Beide Firmen produzieren das gleiche Gut.

$\rightarrow$ die Leute kaufen bei der Firma, die den niedrigeren Preis hat:

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 34 - p_1 & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{34 - p_1}{2} & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases} \qquad D_2(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{34 - p_2}{2} & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 34 - p_2 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Spieler:innen Firmen 1 & 2

Strategien $S_i = \mathbb{R}_{\geq}$ (Preise $p_i \geq 0$)

Auszahlungsfunktion (Gewinn)

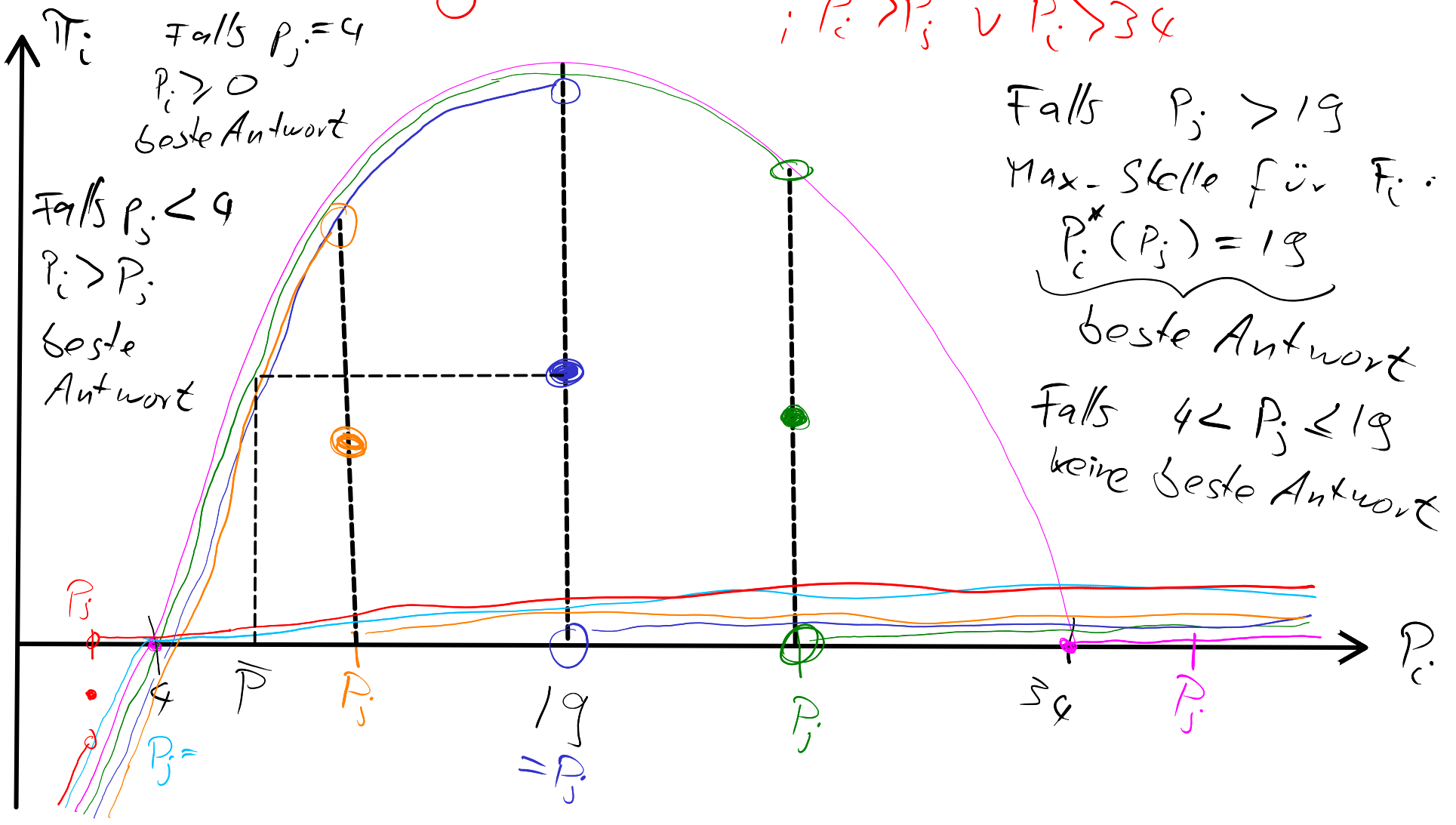
$$\pi_i(p_i, p_j) = \overbrace{D_i(p_i, p_j) \cdot p_i}^{\text{Umsatz}} - \overbrace{D_i(p_i, p_j) \cdot 4}^{\text{Kosten}}$$

$$= D_i(p_i, p_j)(p_i - 4)$$

$$= \begin{cases} (34 - p_i)(p_i - 4) & ; \ p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(34 - p_i)(p_i - 4) & ; \ p_i = p_j \\ 0 & ; \ p_i > p_j \ \vee \ p_i > 34 \end{cases}$$

$p_i \leq 34$

$$\Pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} (34 - p_i)(p_i - 4) & ; \; p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(34 - p_i)(p_i - 4) & ; \; p_i = p_j \\ 0 & ; \; p_i > p_j \vee p_i > 34 \end{cases}$$



Beste Antworten von F_i auf P_j

$$p_i^*(p_j) = \begin{cases} 19 \Rightarrow \pi_i = \pi^M & p_j > 19 \\ \emptyset & 4 < p_j \leq 19 \\ [4, \infty) \Rightarrow \pi_i = 0 & p_j = 4 \\ (p_j, \infty) \Rightarrow \pi_i = 0 & 0 \leq p_j < 4 \end{cases}$$

$(p_1, p_2) = (4, 4)$ ist ein NGG

es ist das einzige!

Was ist an dem Bertrand Modell speziell?

Die Nachfragefunktion!

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 34 - p_1 & \text{falls } p_1 < p_2 \\ \frac{34 - p_1}{2} & \text{falls } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{falls } p_1 > p_2 \end{cases}$$

Falls $p_1 = p_2$ führt eine beliebig kleine Preisänderung zu einer Veränderung der Nachgefragten Menge um 100%.

$\tilde{p}_1 > p_2 \Rightarrow$ die Nachfrage sinkt um 100% .

$\tilde{p}_1 < p_2 \Rightarrow$ die Nachfrage steigt um $\sim$ 100%.

Diese Eigenschaft des Modells ist a) wichtig für die Resultate

aber b) nicht besonders realistisch.

Bertrand Duopol

Zwei Strategien um dem Wettbewerb auszuweichen:

- **Bestpreisgarantie**

  → Eine Firma garantiert die Erstattung der Preisdifferenz, falls eine Konkurrentin einen niedrigeren Preis anbietet.

- **Produktdifferenzierung**

  → Eine Firma verändert wesentliche Eigenschaften des Gutes, damit es nicht mehr perfekt substituierbar ist.

Die Tragödie der Allmende

In einem Dorf wohnen vier Familien.

Jede Familie i hat $x_i \geq 0$ Ziegen auf der gemeinschaftlichen Wiese.

$X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ist die Gesamtzahl der Ziegen.

Jede Ziege kostet 1€.

Falls X Ziegen auf der gemeinschaftlichen Wiese grasen, erwirtschaften sie insgesamt $16 \cdot \sqrt{X}$.

Die x_i Ziegen von Familie i erwirtschaften demnach $16 \cdot \sqrt{X} \cdot \frac{x_i}{X}$.

Gesamtertrag

Anteil von i

Die Familien entscheiden gleichzeitig, wie viele Ziegen grasen sollen.

Zusätzliche Annahme: Ziegen sind beliebig teilbar.

Spieler:innen $1, 2, 3, 4$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

$S_i = \mathbb{R}_{\geq}$ ($x_i \geq 0$ # ziegen)

$$u_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 16 \cdot \sqrt{\underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{X}} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} - x_i$$

$$= 16 \frac{x_i}{\sqrt{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}} - x_i$$

f' g f g'

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 16 \cdot \left(\frac{1 \cdot \sqrt{X} - x_i \frac{1}{2\sqrt{X}}}{\sqrt{X}^2} \right) - 1 \leq 0 \quad (= 0, \text{falls } x_i > 0)$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot \left(\sqrt{X} - x_i \frac{1}{2\sqrt{X}} \right) \leq X$$

$$16\cdot\left(\sqrt{\bar{x}} - x_i \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}}\right) \leq \bar{x} \qquad | \cdot \sqrt{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow 16\left(\sqrt{\bar{x}}^2 - x_i \frac{1}{2}\right) \leq \bar{x}\sqrt{\bar{x}}$$

$$\Leftrightarrow 16\bar{x} - 8x_i \leq \bar{x}\sqrt{\bar{x}}$$

$$\bar{x}(16 - \sqrt{\bar{x}})$$

Falls $16\bar{x} - \bar{x}\sqrt{\bar{x}} > 0$

$$\Leftrightarrow 16\bar{x} - \bar{x}\sqrt{\bar{x}} \leq 8x_i$$

$$\Rightarrow x_i > 0$$

Falls $0 < \sqrt{\bar{x}} < 16 \Rightarrow x_i > 0$

$$8x_i = \bar{x}(16 - \sqrt{\bar{x}}) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{x} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow 8x_i = 2\bar{x}$$

$$2\sqrt{x} = 8x_i = \sqrt{x}\left(16 - \sqrt{x}\right)$$

(Symmetrie x_i gleich für $i = 1,2,3,4$)

$$\Leftrightarrow \quad 2 = 16 - \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 14 \overset{(x \geq 0)}{\Leftrightarrow} x = 14^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{196}{4} = 49 \quad \rightsquigarrow U_i(49,49,49,49)$$

$$= 16\sqrt{196} \cdot \frac{1}{4} - 49$$

$$= 4 \cdot 14 - 49 = 8 \cdot 7 - 7 \cdot 7$$

$$= 7$$

Soziales Optimum (Kartell)

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} \sum_{i=1}^{4} U_i(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

$$\max_{x_1,x_2,x_3,x_4} 16\cdot\sqrt{x_1+x_2+x_3+x_4}\cdot\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4} - (x_1+x_2+x_3+x_4)$$

$$= 16\sqrt{X} - X = W(X)$$

$$\frac{dW}{dX} = 16\cdot\frac{1}{2\sqrt{X}} - 1 \leq 0 \quad (=0,\ X>0)$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{X} \Rightarrow X^{**} = 64$$

Teile $\underline{X}^{**} = 64$ gleichmäßig auf:

$$x_i^{**} = \frac{64}{4} = 16$$

$$U_i(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}, x_4^{**}) = 16 \cdot \sqrt{64} \cdot \frac{1}{4} - 16$$

$$= 4 \cdot 8 - 16 = 16 > 7$$

Wettstreite

In einem Wettstreit konkurrieren mehrere Spieler:innen um einen Preis.

Die Spieler:innen wenden Ressourcen auf, um einen Anteil dieses Preises zu bekommen.

Der Anteil am Preis entspricht dem Verhältnis der eigenen aufgewendeten Ressourcen zur Gesamtmenge der Ressourcen.

Die aufgewendeten Ressourcen sind verloren, egal ob man gewinnt oder verliert.

Wettstreite: Standard Tullock Contest mit $n = 2$

Spieler:in i wählt Ressourcenmenge $s_i \geq 0$ ($S_i = \mathbb{R}_{\geq}$)

Wertschätzung für Preis: 4

Anteil am Preis:

$$\frac{s_i}{s_1 + s_2} \text{ falls } s_1 + s_2 > 0 \text{ und } \frac{1}{2} \text{ falls } s_1 + s_2 = 0$$

Auszahlung für Spieler:in i:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \frac{s_i}{s_1 + s_2} 4 - s_i$$

Schlüsselwörter in Kapitel 1.2

- Reaktionsfunktionen
- Mengenwettbewerb: Cournot Gleichgewicht
- Preiswettbewerb: Bertrand Gleichgewicht
- Tragödie der Allmende
- Ineffizienz des Nash Gleichgewichts
- Wettstreite

Gemischte Strategien und Existenz eines Nash Gleichgewichts

Reine und gemischte Strategien

Eine **reine Strategie** ist eine Strategie, welche **mit Sicherheit** gewählt wird.

Eine **gemischte Strategie** ist eine **zufällige Auswahl** aus mehreren reinen Strategien.

Gemischte Strategie: Interpretation 1

Ein:e Spieler:in wählt anhand eines tatsächlichen Zufallsmechanismus (z.B. Würfel) eine von mehreren reinen Strategien aus.

Die Entscheidung des/der Spieler:in betrifft dann die Auswahl des Zufallsmechnismus.

Der/die Spieler:in bindet sich im Vorhinein an das Ergebnis des Zufallsmechanismus.

Gemischte Strategie: Interpretation 2

Ein:e Spieler:in hält mehrere Entscheidungen ihres Gegenübers für möglich.

Er/sie weist jeder möglichen Entscheidung eine Wahrscheinlichkeit zu.

Gemischte Strategie: Interpretation 3

Ein:e Spieler:in tritt gegen eine:n zufällig ausgewählte:n Partner:in an.

Jede:r der möglichen Partner:innen wählt eine reine Strategie, der/die Spieler:in ist sich aber im Unklaren, gegen wen er/sie spielt.

Gemischte Strategie: Interpretation 4

Der/die Spieler:in lernt zufällig eine wichtige Information, die seine/ihre Entscheidung beeinflusst.

Außenstehende wissen nicht um diese wichtige Information.

Für sie scheint es so, als würde sich der/die Spieler:in zufällig entscheiden.

Gemischte Strategie in endlichen Normalformspielen

In einem endlichen Normalformspiel sei die Menge der reinen Strategien von Spieler:in i durch

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}\}$$

gegeben. $k < \infty$ ist also die Anzahl der reinen Strategien von i.

Eine **gemische Strategie** von Spieler:in i ist dann eine Liste von Wahrscheinlichkeiten

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{ik}) \ ,$$

welche der reinen Strategie s_{ij} die Wahrscheinlichkeit σ_{ij} zuordnet.

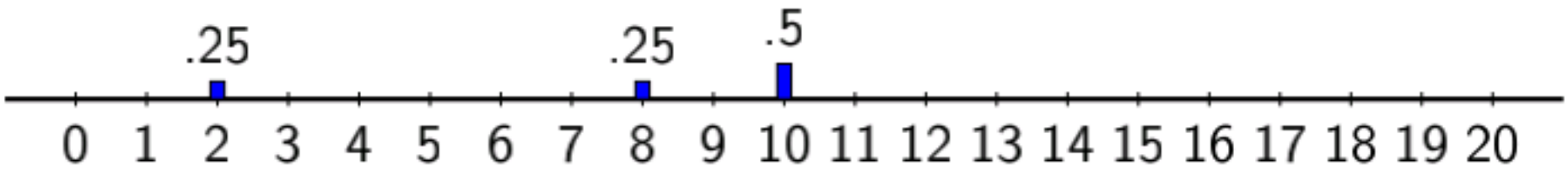
Es muss gelten $\sigma_{ij} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, k$ und $\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} = 1$.

Gemischte Strategien: Beispiel

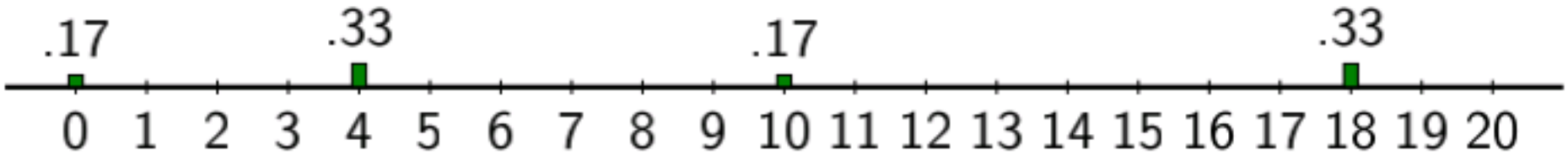
Menge der reinen Strategien:

$$S_i = \{0, 1, \ldots, 20\}$$

Eine mögliche gemischte Strategie:



Noch eine mögliche gemischte Strategie:



Menge gemischter Strategien in endlichen Spielen

Wir bezeichnen die Menge gemischter Strategien als **Simplex**.

Für $|S_i| = k \in \mathbb{N}$ ist die Menge gemischter Strategien definiert durch:

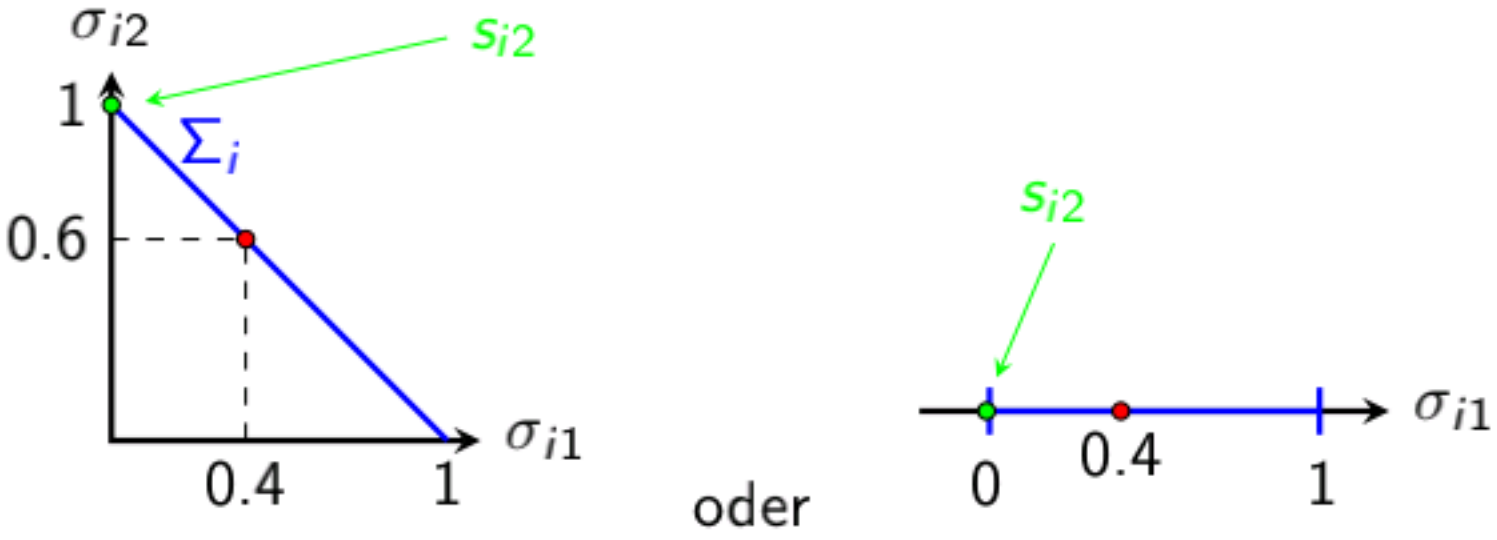
$$\Sigma_i = \left\{ \sigma_i \in \mathbb{R}^k \middle| \sigma_{ij} \geq 0, j = 1, \ldots, k, \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} = 1 \right\}$$

Σ_i enthält (überabzählbar) unendlich viele gemischte Strategien.

Σ_i ist nicht leer, beschränkt und abgeschlossen.

Manchmal wird dieser Simplex auch mit $\Delta(S_i)$ bezeichnet.

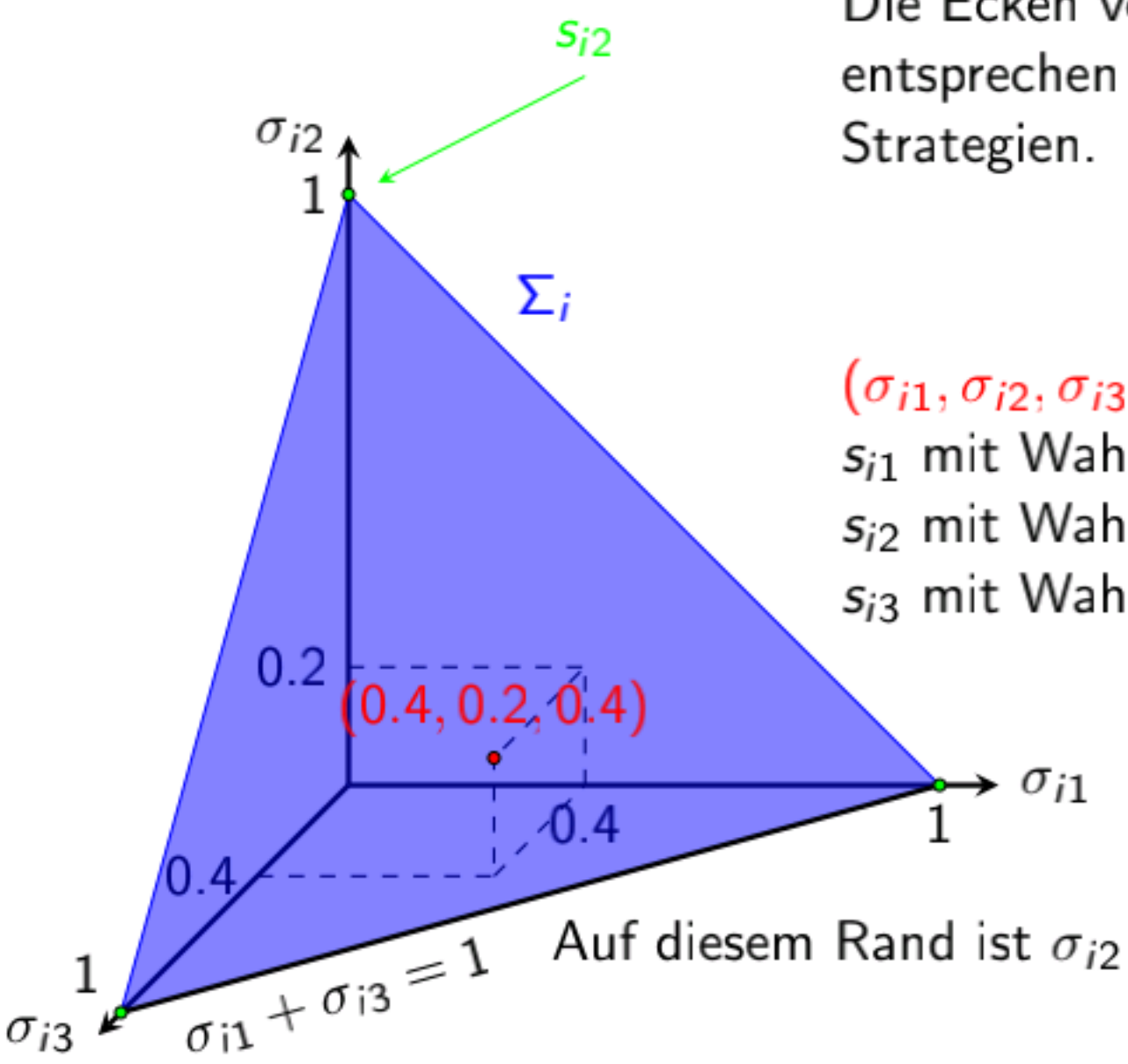
Der Simplex für $k = 2$



Mit der gemischten Strategie $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}) = (0.4, 0.6)$ wird die reine Strategie s_{i1} mit Wahrscheinlichkeit 40% und die reine Strategie s_{i2} mit Wahrscheinlichkeit 60% gespielt.

Die Ränder von Σ_i entsprechen den reinen Strategien s_{i1} und s_{i2}.

Der Simplex für $k = 3$

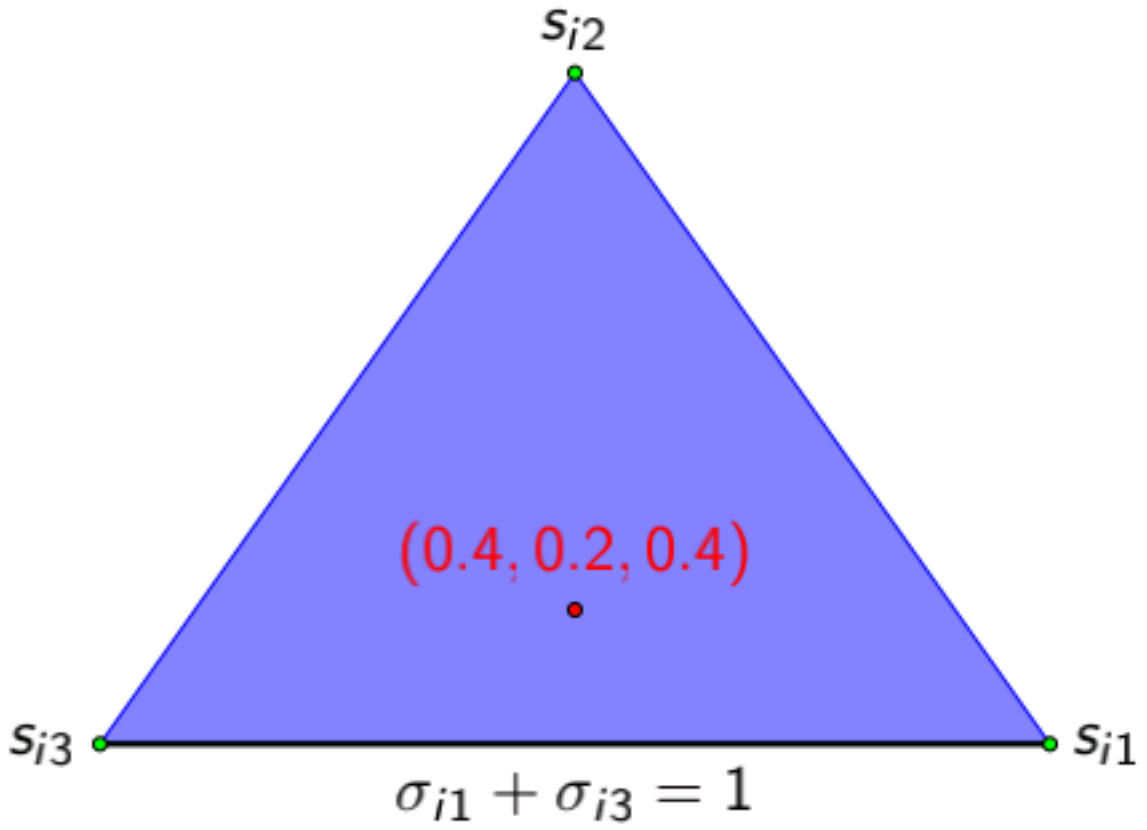


Die Ecken von Σ_i entsprechen den reinen Strategien.

$(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}) = (0.4, 0.2, 0.4)$:
s_{i1} mit Wahrscheinlichkeit 40%
s_{i2} mit Wahrscheinlichkeit 20%
s_{i3} mit Wahrscheinlichkeit 40%

Auf diesem Rand ist $\sigma_{i2} = 0$.

Der Simplex für $k = 3$



Gemischte Strategien für abzählbar unendliche Strategienräume

Enthält S_i unendlich viele reine Strategien, die durchnummeriert werden können, so nennen wir S_i **abzählbar unendlich**.

Beispiel: die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Auch hier ist eine gemischte Strategie eine Liste von Wahrscheinlichkeiten. Diese Liste ist aber unendlich lang:

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots)$$

Damit σ_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss gelten:

$$\sigma_{ij} \geq 0 \text{ für alle } j = 1, 2, \ldots \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{ij} = 1$$

Beispiel für ein σ_i über $\mathbb{N}$:

$$\sigma_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

Gemischte Strategien für überabzählbar unendliche Strategienräume

Oft finden Strategienräume Anwendung, deren Elemente sich nicht durchnummerieren lassen, wie z.B. $\mathbb{R}_{\geq}$ oder $[0, 1]$.

Eine gemischte Strategie ist dann eine Dichtefunktion σ_i mit

$$\sigma_i : S_i \to \mathbb{R}_{\geq} \text{ und } \int_{S_i} \sigma_i(s_i) ds_i = 1$$

In dieser einführenden Vorlesung werden wir uns bei Spielen mit unendlichen Strategienräumen auf reine Strategien konzentrieren.

Beispiel 6: Matching Pennies

$q^* = \frac{1}{4}$ $\quad$ $1 - q^* = \frac{3}{4}$

(2)

(1)		Kopf	Zahl
$p^* = \frac{1}{4}$	Kopf	-5 , 5	1 , -1
$1 - p^* = \frac{3}{4}$	Zahl	1 , -1	-1 , 1

$U_1(s_1, q^*)$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$

$U_2(p^*, \text{Kopf})$ $\quad$ $U_2(p^*, \text{Zahl})$

Gibt es hier ein Nash Gleichgewicht in **reinen Strategien**?

$= 5 \cdot \frac{1}{4} + (-1)\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $= (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

Beispiel 6: Matching Pennies

Gemische Strategie: spiele Kopf mit Wahrscheinlichkeit q und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $1 - q$, wobei $0 \leq q \leq 1$.

Notation: $\sigma_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}) = (q, 1 - q)$

In einer abkürzenden Schreibweise können wir die obige gemischte Strategie auch einfach mit q bezeichnen.

Die Menge der gemischten Strategien, also der Simplex wäre dann ausführlich durch

$$\Sigma_i = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 | q_1, q_2 \geq 0, q_1 + q_2 = 1\}$$

gegeben und abgekürzt durch

$$\Sigma_i = [0, 1]$$

definiert.

Beispiel 6: Matching Pennies

Profil von gemischten Strategien:

Eine gemischte Strategie für jede:n Spieler:in.

Wichtige Annahme:

Beide Spieler:innen mischen **unabhängig** voneinander!

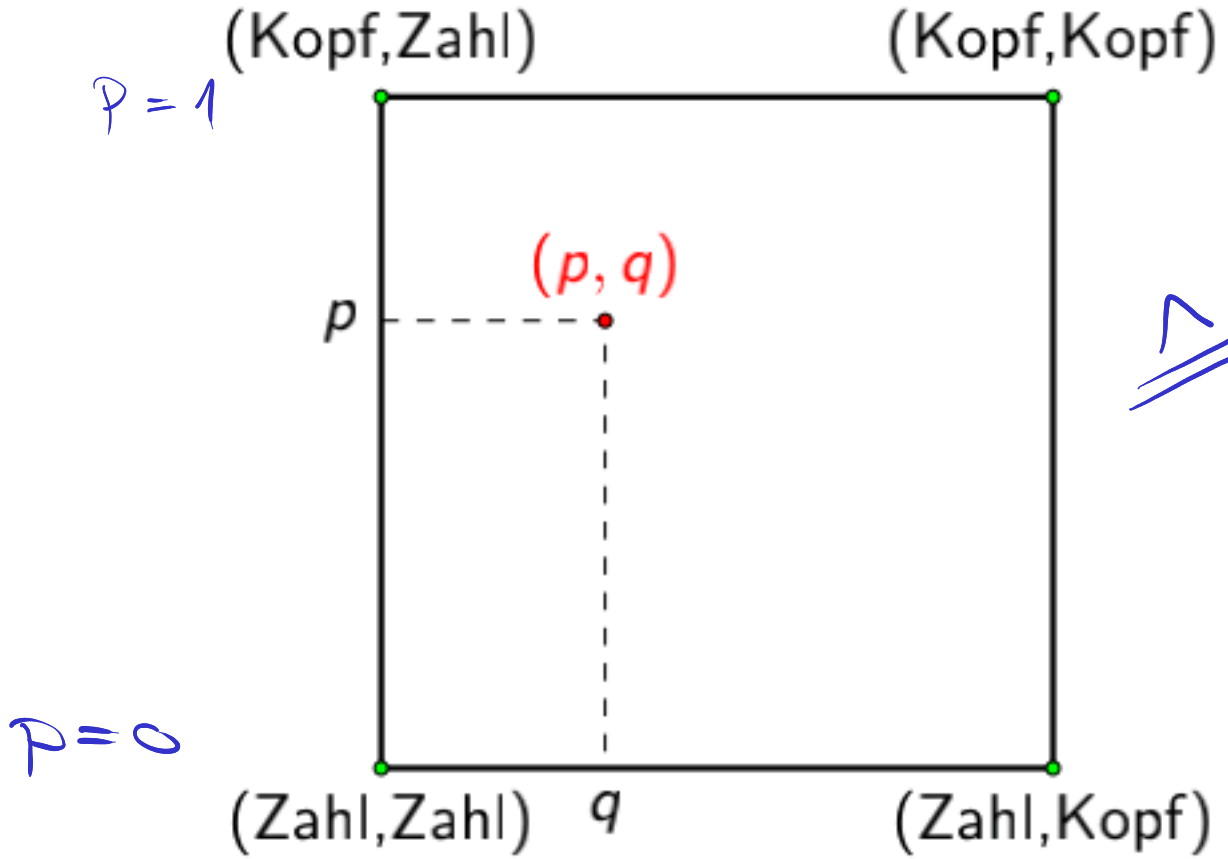
Spieler:in 2 mischt mit den Wahrscheinlichkeiten $(q, 1-q)$ und Spieler:in 1 mischt mit den Wahrscheinlichkeiten $(p, 1-p)$.

Die Menge aller Profile von gemischte Strategien ist streng genommen eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$.

Mit der vereinfachten Notation $q \in [0,1]$ und $p \in [0,1]$ ist die Menge aller Paare von gemischten Strategien das Einheitsquadrat.

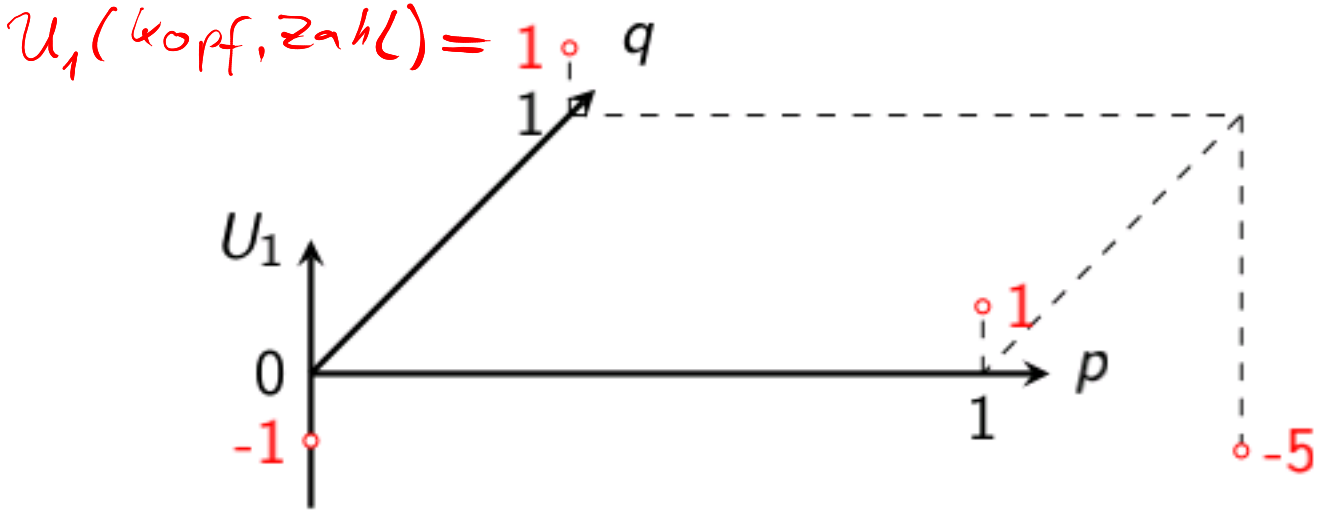
Beispiel 6: Matching Pennies

Menge aller Profile von gemischten Strategien in der vereinfachten Darstellung:



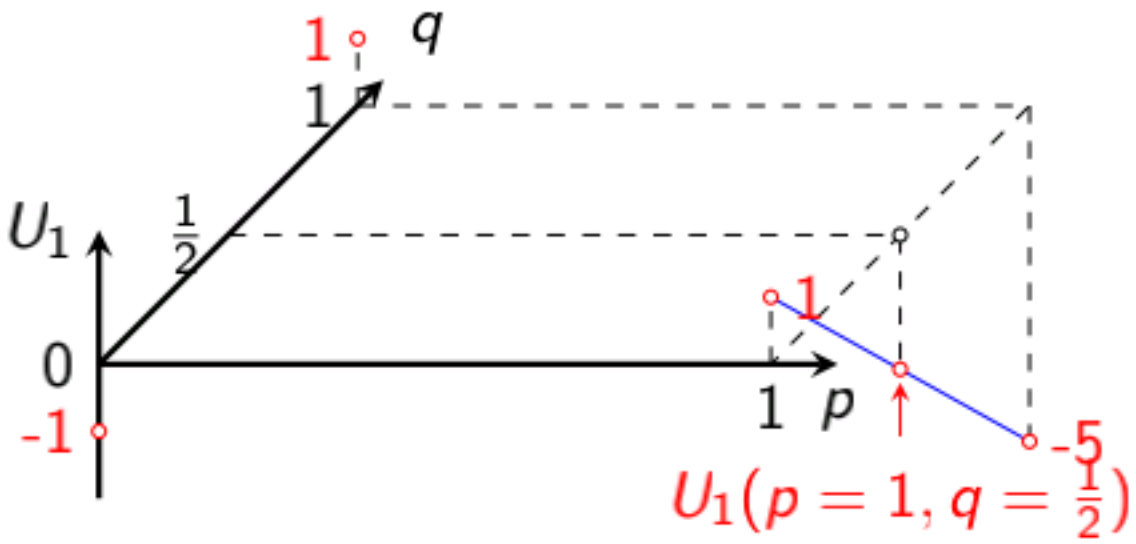
Auszahlungen bei gemischten Strategien

Bisher haben wir Präferenzen über sichere Zustände durch ordinale Nutzenzahlen repräsentiert, wie zum Beispiel in der Auszahlungsmatrix zu Matching Pennies.



Wir müssen nun Präferenzen über zufällige Zustände, also über Lotterien, durch Nutzenzahlen repräsentieren.

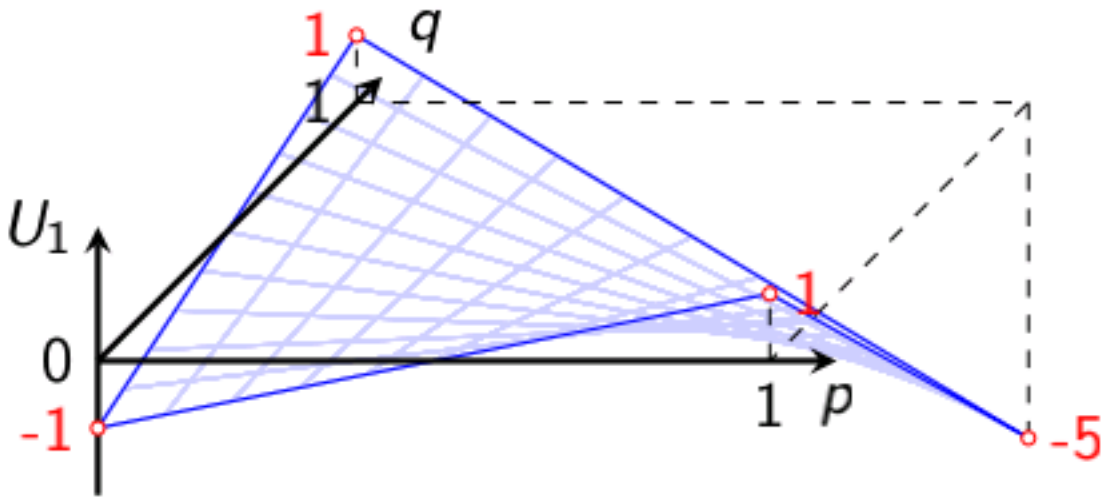
Auszahlungen bei gemischten Strategien



Wir nehmen in der Spieltheorie an, dass der Nutzen für eine Lotterie, welche durch die gemischten Strategien p und q induziert wird, der gewichtete Nutzen aus den sicheren Zuständen ist. Die Gewichte sind hierbei die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die jeweiligen Zustände eintreten.

Hier gilt: $U_1(p = 1, q = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-5) = -2$

Auszahlungen bei gemischten Strategien



Die Nutzenfunktion

$$
\begin{array}{rcccccc}
U_1(p,q) & = & p & \cdot & q & \cdot & u_1(\text{Kopf},\text{Kopf}) \\
& + & p & \cdot & (1-q) & \cdot & u_1(\text{Kopf},\text{Zahl}) \\
& + & (1-p) & \cdot & q & \cdot & u_1(\text{Zahl},\text{Kopf}) \\
& + & (1-p) & \cdot & (1-q) & \cdot & u_1(\text{Zahl},\text{Zahl})
\end{array}
$$

wird **Erwartungsnutzen** genannt.

Erwartungsnutzentheorie

von Neumann & Morgenstern (1944): Theory of Games and Economic Behavior

Jede:r Spieler:in hat eine Präferenzordnung auf dem Raum $\Delta(S)$ aller Lotterien p über alle Profile von reinen Strategien $S = \times_{i=1}^{n} S_i$.

Diese Präferenzordnung erfülle:

(1) Transitivität und Vollständigkeit

(2) Stetigkeit

(3) Unabhängigkeit

von Neumann und Morgenstern haben gezeigt, dass die **Erwartungsnutzenfunktion**, die eine solche Präferenzordnung repräsentiert, linear in den Wahrscheinlichkeiten sein muss:

$$U_i(p) = \sum_{s \in S} p(s) \cdot u_i(s) \ , \ \ p \in \Delta(S)$$

Das Ellsberg Paradoxon

Es gibt eine Urne mit 90 Kugeln:

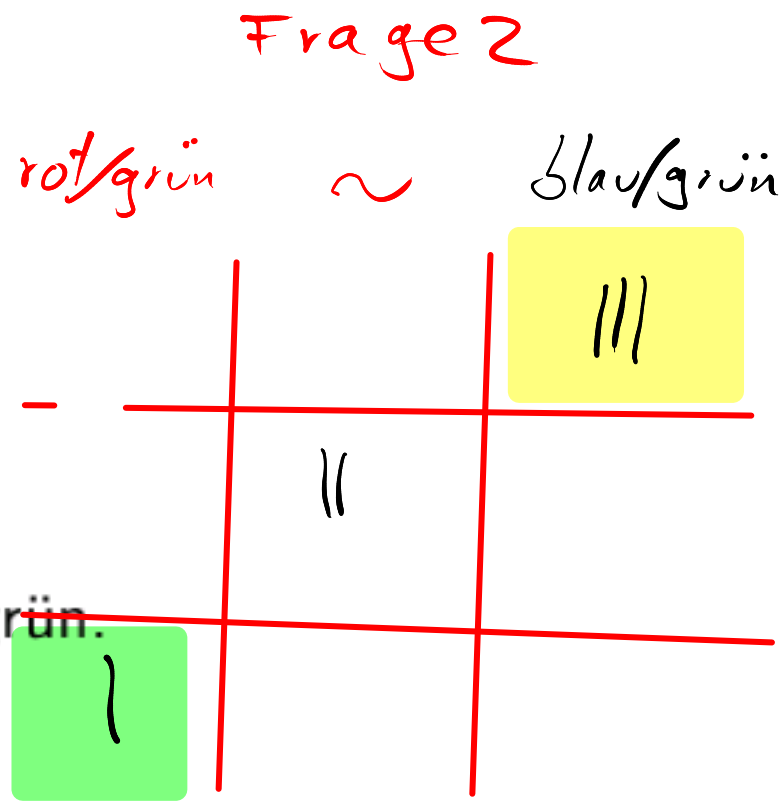
- 30 Kugeln sind rot.
- Die restlichen Kugeln sind blau oder grün.
  (Jede Aufteilung ist möglich.)

Frage 1:

Wettest Du auf rot oder wettest Du auf blau?

Wird eine Kugel in „Deiner“ Farbe gezogen,
gewinnst Du 100€.

Das Ellsberg Paradoxon



Es gibt eine Urne mit 90 Kugeln:

- 30 Kugeln sind rot.
- Die restlichen Kugeln sind blau oder grün.
  (Jede Aufteilung ist möglich.)

Frage 2:

Wettest Du auf rot oder grün oder wettest Du auf blau oder grün?

Wird eine Kugel in einer „Deiner“ Farben gezogen,
gewinnst Du 100€.

Frage 1 rot

(Annahme: $u(100€) > u(0€)$)

b: # blaue Kugeln

$$U^1(\text{rot}) = \frac{30}{90} \cdot u(100€) + \frac{60}{90} \cdot u(0€)$$

$$U^1(\text{blau}) = \frac{b}{90} u(100€) + \frac{90-b}{90} u(0€)$$

falls rot $\succ$ blau

$$\frac{30}{90} u(100) + \frac{60}{90} u(0) > \frac{b}{90} u(100) + \frac{90-b}{90} u(0)$$

$$(30-b) u(100) > (90-b-60) u(0)$$

$$(30-b)u(100) > (30-b)u(0)$$

$$(30-b)(\underbrace{u(100)-u(0)}_{>0}) > 0$$

$$\Leftrightarrow 30 > b$$

Frage 2 blau/grün

$$U^2(\text{blau/grün}) = \frac{60}{90}u(100) + \frac{30}{90}u(0)$$

$$U^2(\text{rot/grün}) = \frac{90-b}{90}u(100) + \frac{b}{90}u(0)$$

blau/grün $\succ$ rot/grün $\Leftrightarrow$

$$\frac{60}{90}u(100) + \frac{30}{90}u(0) > \frac{90-b}{90}u(100) + \frac{b}{90}u(0)$$

$$(30-b)u(0) > (30-b)u(100) \Leftrightarrow b > 30$$

Das Allais Paradoxon

$U(B) = \frac{10}{100} u(150) + \frac{89}{100} u(100) + \frac{1}{100} u(0)$ $>$ falls $B \succ A$

$u(100) = U(A)$

Präferierst Du die Situation A gegenüber der Situation B?

$\Leftrightarrow 10u(150) + u(0) > 11 \cdot u(100)$

Situation A:

Du bekommst mit Sicherheit 100 €.

Situation B:

Du bekommst mit

- Wahrscheinlichkeit 10% 150 €.
- Wahrscheinlichkeit 89% 100 €.
- Wahrscheinlichkeit 1% nichts.

Das Allais Paradoxon

Falls $D \succ C$

$$U(D) = \frac{10}{100}u(150) + \frac{90}{100}u(0) > \frac{11}{100}u(100) + \frac{89}{100}u(0) = U(C)$$

Präferierst Du die Situation C gegenüber der Situation D?

$\Leftrightarrow 10 \cdot u(150) + u(0) > 11\,u(100)$

Situation C:

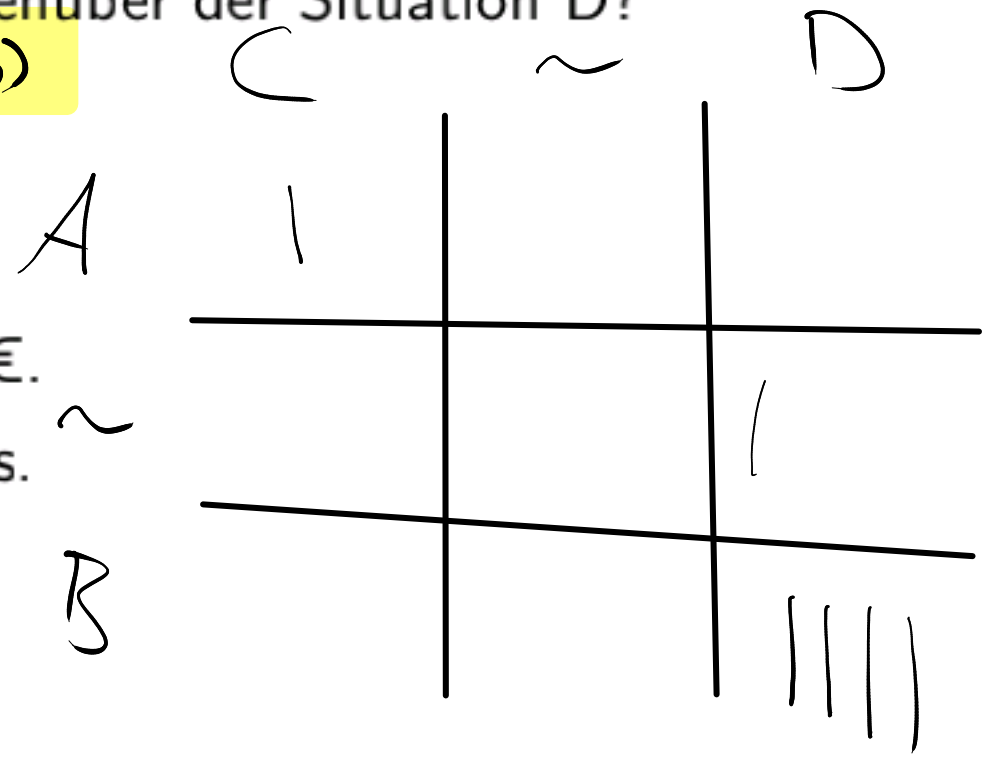
Du bekommst mit

- Wahrscheinlichkeit 11% 100 €.
- Wahrscheinlichkeit 89% nichts.

Situation D:

Du bekommst mit

- Wahrscheinlichkeit 10% 150 €.
- Wahrscheinlichkeit 90% nichts.



Matching Pennies: gemischte Strategien

Gemischte Strategie von Spieler:in 2: $(q, 1-q)$

Wie lauten die erwarteten Auszahlungen für Spieler:in 1?

Spieler:in 1 spielt Kopf ($p = 1$):

$$U_1(p=1,q) = q \cdot \underbrace{u_1(\text{Kopf}, \text{Kopf})}_{-5} + (1-q) \cdot \underbrace{u_1(\text{Kopf}, \text{Zahl})}_{1}$$

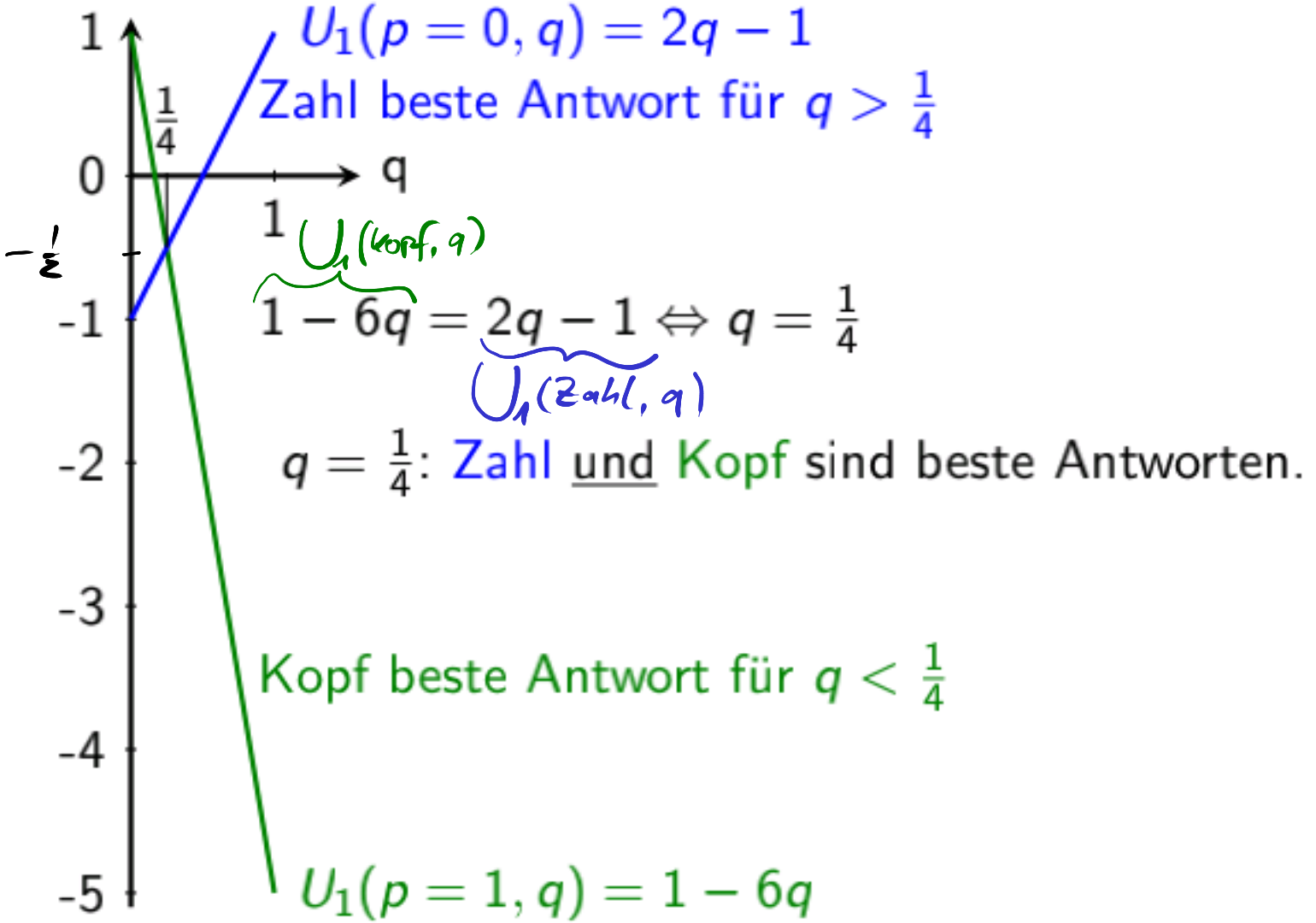
$$= q(-5) + (1-q) \cdot 1 = 1 - 6q$$

Spieler:in 1 spielt Zahl ($p = 0$):

$$U_1(p=0,q) = q \cdot \underbrace{u_1(\text{Zahl}, \text{Kopf})}_{1} + (1-q) \cdot \underbrace{u_1(\text{Zahl}, \text{Zahl})}_{-1}$$

$$= q \cdot 1 + (1-q)(-1) = 2q - 1$$

Matching Pennies: erwartete Auszahlungen



Matching Pennies: beste Antworten

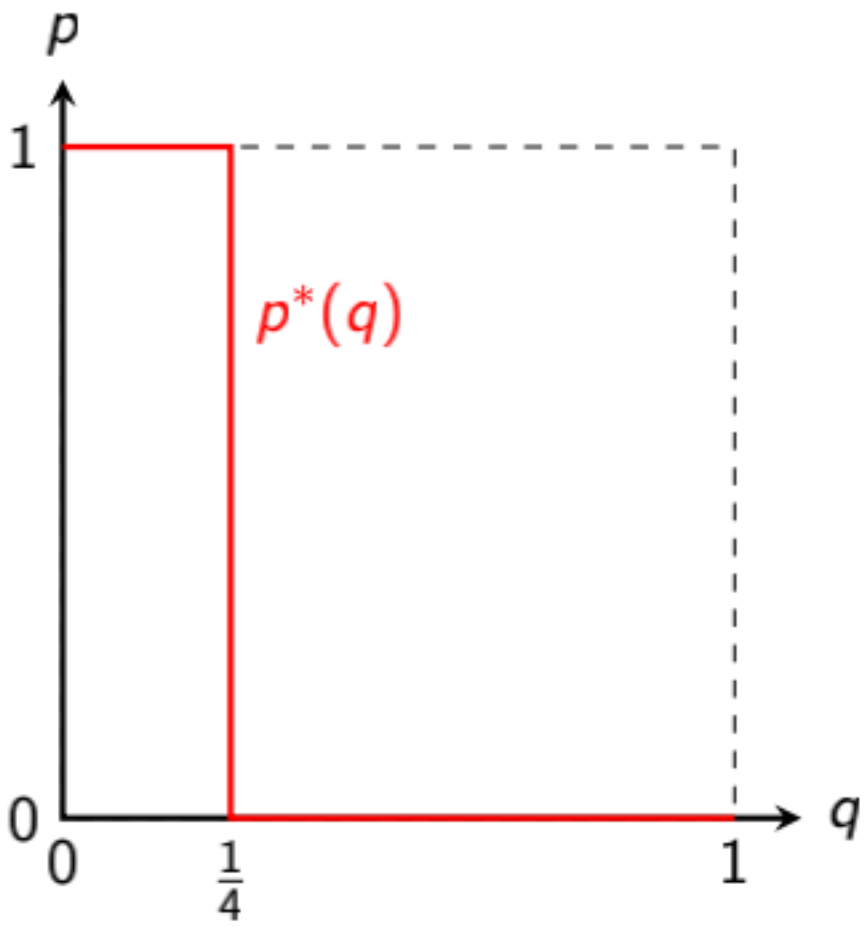
Beste **reine** Antwort von Spieler:in 1 auf die gemischte Strategie q von Spieler:in 2:

$$s_1^*(q) = \begin{cases} \text{Kopf} & \text{falls } q < \frac{1}{4} \\ \text{Kopf und Zahl} & \text{falls } q = \frac{1}{4} \\ \text{Zahl} & \text{falls } q > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Beste **gemischte** Antwort von Spieler:in 1 auf die gemischte Strategie q von Spieler:in 2:

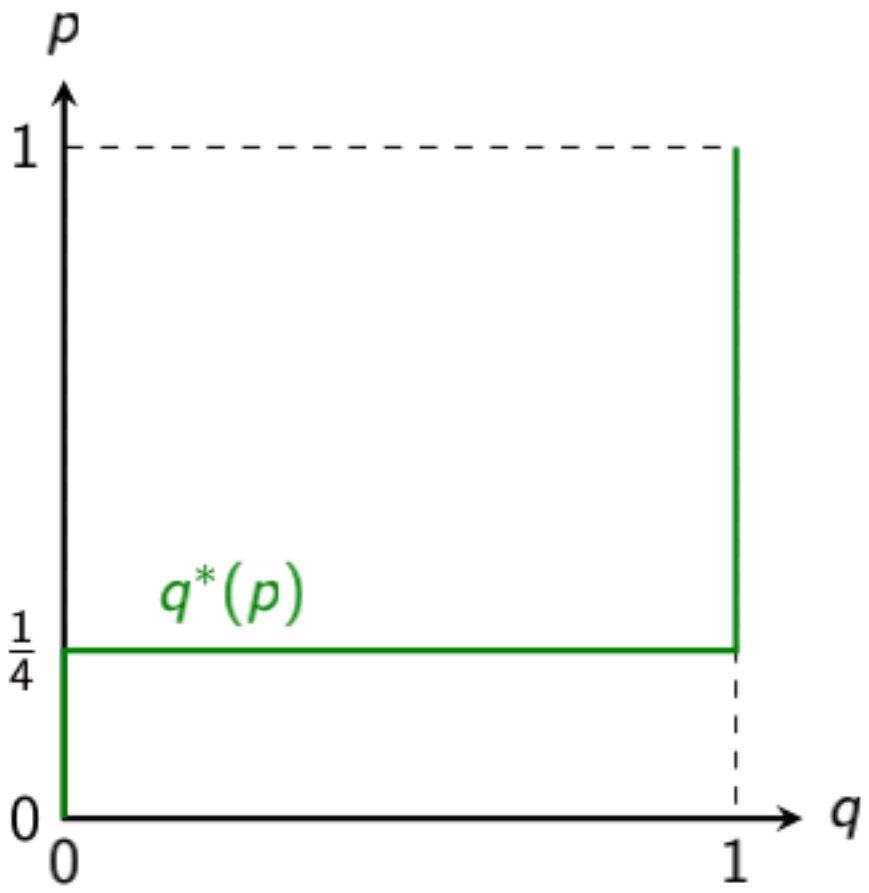
$$p^*(q) = \begin{cases} 1 & \text{falls } q < \frac{1}{4} \\ [0,1] & \text{falls } q = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{falls } q > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Matching Pennies: beste gemischte Antwort von Sp. 1



Matching Pennies: beste gemischte Antwort von Sp. 2

Die Herleitung der gemischten besten Antwort $q^*(p)$ auf die gemischte Strategie p von Spieler:in 1 erfolgt analog.



Matching Pennies: Nash Gleichgewicht

Ein gemischtes Nash Gleichgewicht (p^*, q^*) erfüllt:

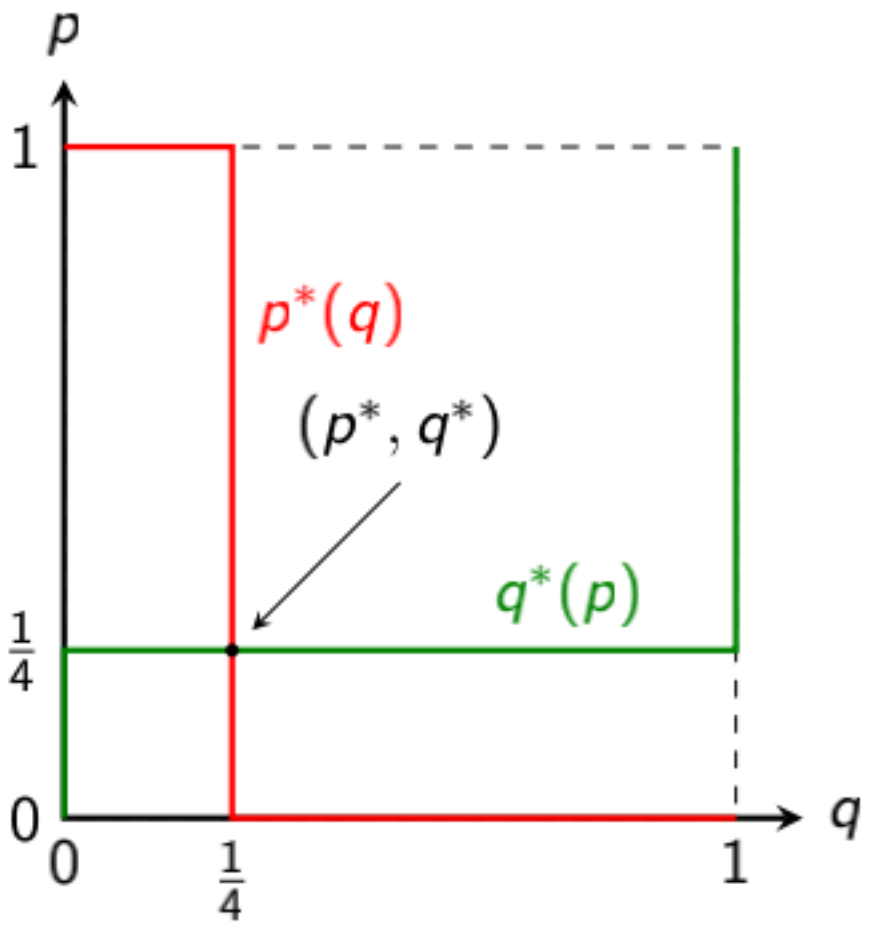
$$U_1(p^*, q^*) \geq U_1(p, q^*) \text{ für alle } p \in [0, 1]$$

$$U_2(p^*, q^*) \geq U_2(p^*, q) \text{ für alle } q \in [0, 1]$$

Dies ist gleichbedeutend zu:

$$p^* \in p^*(q^*) \text{ und } q^* \in q^*(p^*)$$

Matching Pennies: gemischtes Nash Gleichgewicht



Matching Pennies: Diskussion

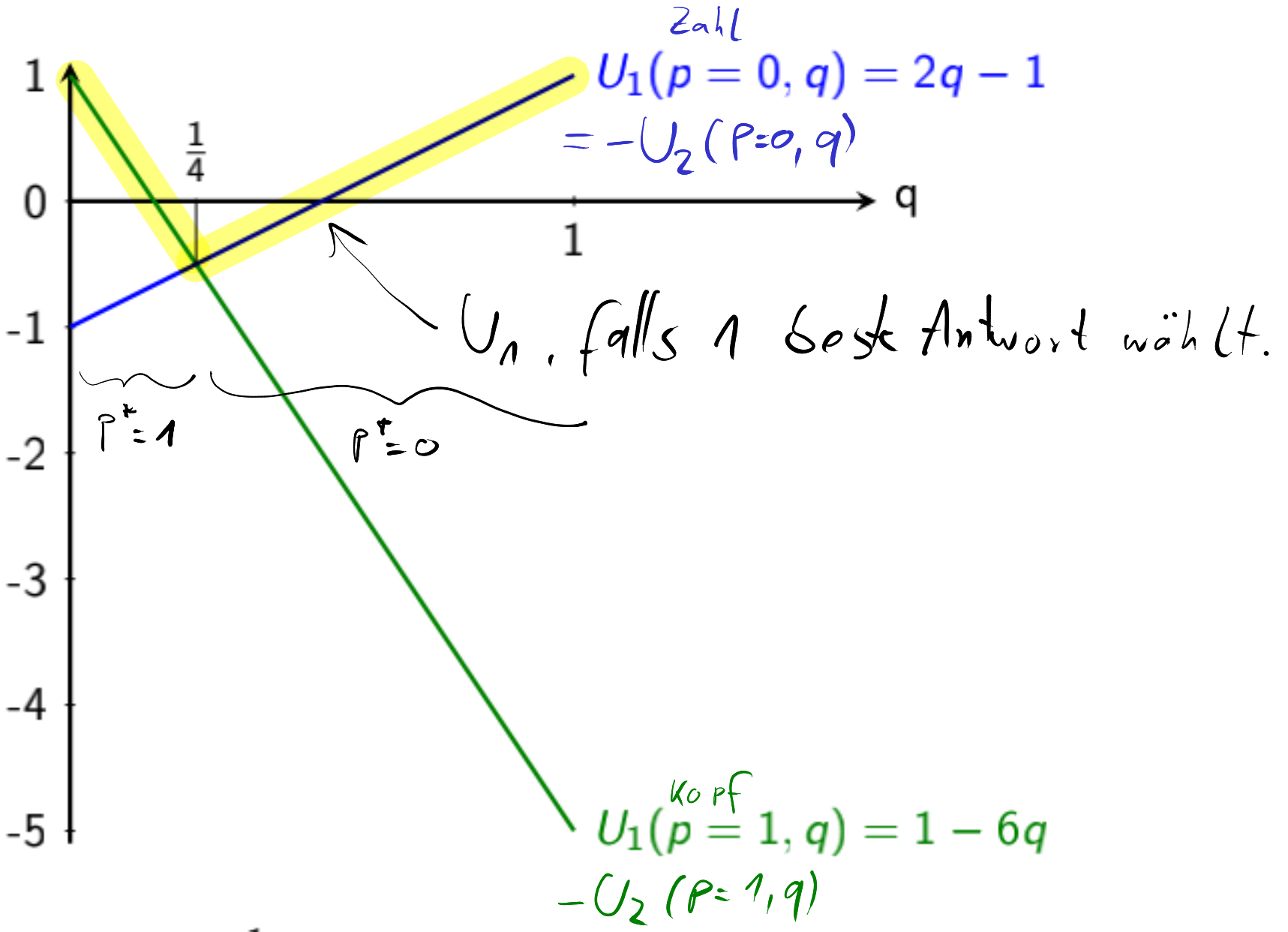
Im (einzigen) Nash Gleichgewicht wählen beide Personen unabhängig voneinander Kopf mit Wahrscheinlichkeit 25% und Zahl mit Wahrscheinlichkeit 75%.

Beide sind im Gleichgewicht **indifferent** zwischen den reinen Strategien Kopf und Zahl und damit auch zwischen allen gemischten Strategien.

Es gibt zwar keinen zwingenden Grund von der gleichgewichtigen Strategie abzuweichen ...

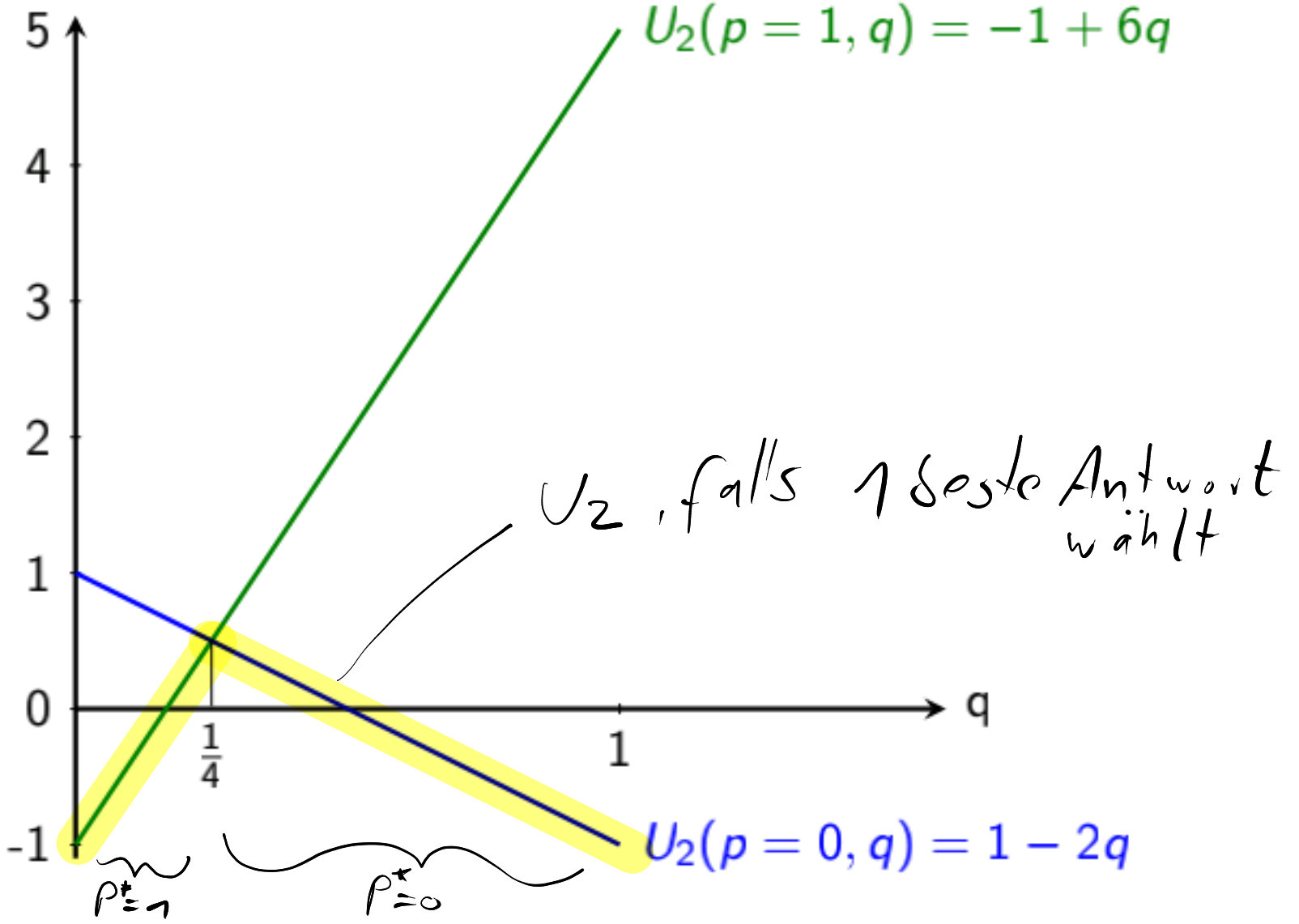
... aber gibt es einen plausiblen Grund **für** die gleichgewichtige Strategie?

Min-Max und Max-Min-Strategie



Die Strategie $q^* = \frac{1}{4}$ minimiert das Maximum von $U_1(p=0,q)$ und $U_1(p=1,q)$.

Min-Max und Max-Min-Strategie



Wegen $U_2(p,q) = -U_1(p,q)$ maximiert die Strategie $q^* = \frac{1}{4}$ das Minimum von $U_2(p=0,q)$ und $U_2(p=1,q)$.

Nullsummenspiele

Nullsummenspiele haben die Eigenschaft, dass sich die Auszahlungen aller Spieler:innen in jedem möglichen Spielausgang auf Null summieren.

In Nullsummenspielen erfüllt ein gemischtes Gleichgewicht folgende Eigenschaft:

Im Gleichgewicht sind zwar alle Spieler:innen indifferent zwischen allen reinen Strategien, aber

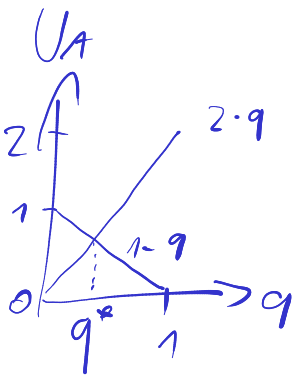
die Wahrscheinlichkeit der eigenen gemischten Gleichgewichtsstrategie maximiert das Minimum der möglichen eigenen erwarteten Auszahlungen.

Beste Antworten von Anne im 1Live/eldoradio*-Spiel

$U_B(p, 1L) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$
$U_B(p, e^*) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 = 2 - 2p$
$\Rightarrow p = 2 - 2p \Leftrightarrow 3p = 2 \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$

Anne \ Ben	1L (q)	e* ($1-q$)
1L (p)	2 , 1 *	0 , 0
e* ($1-p$)	0 , 0	1 , 2 *

$U_A(1L, q) = 2 \cdot q + 0(1-q) = 2q$
$U_A(e^*, q) = 0 \cdot q + 1 \cdot (1-q) = 1 - q$
$\Rightarrow 2q = 1 - q \Leftrightarrow 3q = 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$



Lotterien über Profile von reinen Strategien

S_i ist die Menge der reinen Strategien s_i für Spieler:in $i = 1, \ldots, n$.

Eine gemischte Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i = \Delta(S_i)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über S_i.

$\sigma_i(s_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass s_i gespielt wird.

Das kartesische Produkt $S = \times_{i=1}^{n} S_i$ ist die Menge aller Profile s von reinen Strategien.

Die Menge aller Lotterien über S ist der Simplex $\Delta(S)$.

$p(s) \in \Delta(S)$ ist die Wahrscheinlichkeit der reinen Strategie s.

Der Erwartungsnutzen der Spieler:innen ist auf $\Delta(S)$ definiert.

Beispiel: korrelierte Lotterie

Für $S_1 = S_2 = \{A, B\}$ lautet die Menge aller Profile von reinen Strategien

$$S = S_1 \times S_2 = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$$

Betrachte die Lotterie

$$P(A, A) = P(A, B) = P(B, A) = \frac{1}{3}, \; P(B, B) = 0$$

Beispiel: korrelierte Lotterie

s_1 \ s_2	A	B	$\mathbb{P}(s_1)$
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
B	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
$\mathbb{P}(s_2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Die Wahrscheinlichkeiten, dass $s_1 = A$ bzw. dass $s_2 = A$ lauten
$\mathbb{P}(s_1 = A) = P(A, A) + P(A, B) = \frac{2}{3}$ und
$\mathbb{P}(s_2 = A) = P(A, A) + P(B, A) = \frac{2}{3}$.

Die Wahrscheinlichkeit von $(s_1, s_2) = (A, A)$ lautet

$$P(A, A) = \frac{1}{3} \neq P(s_1 = A) \cdot P(s_2 = A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Daher ist dies eine korrelierte Verteilung über S.

Gemischte Strategien: Unabhängige Lotterien!

Annahme:

Alle Spieler:innen mischen unabhängig voneinander.

Daher muss für ein Profil gemischter Strategien $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und für jedes Profil reiner Strategien $s = (s_1, \ldots, s_n)$ gelten:

$$\sigma(s) = \sigma_1(s_1) \cdot \sigma_2(s_2) \cdot \ldots \cdot \sigma_n(s_n)$$

Wir lassen also nicht alle Lotterien $p \in \Delta(\times_{i=1}^{n} S_i)$ als gemischte Strategien zu, sondern nur diejenigen Lotterien $\sigma \in \times_{i=1}^{n} \Sigma_i$, welche unabhängig mischen.

Menge aller Lotterien p:

$$\Delta(S) = \Delta(\times_{i=1}^{n} S_i)$$

Menge aller Profile von gemischten Strategien σ:

$$\Sigma = \times_{i=1}^{n} \Sigma_i = \times_{i=1}^{n} \Delta(S_i)$$

Beste gemischte Antworten

Für ein Profil von gemischten Strategien

$$\sigma_{-i} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$$

erfüllt eine gemischte beste Antwort $\hat{\sigma}_i$ von Spieler:in i folgende Ungleichung:

$$U_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i$$

Die Menge der besten Antworten von i auf σ_{-i} ist durch

$$\arg \max_{\sigma_i \in \Sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) =: \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$$

definiert.

Wichtige Eigenschaften von $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ für endliche Strategienräume S_i

Falls S_i endlich viele reine Strategien enthält, ist die Menge der besten Antworten $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$

- nicht leer,
- konvex und
- abgeschlossen.

beschränkt

Wir begründen diese Eigenschaften auf den folgenden Folien jeweils unter der Voraussetzung, dass S_i endlich ist.

Die Menge der besten Antworten $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ ist nicht leer.

Falls S_i endlich viele Elemente besitzt, ist Σ_i **nicht leer**, **beschränkt** und **abgeschlossen**.

Für ein gegebenes σ_{-i} ist U_i linear in σ_i und damit **stetig**.

Extremwertsatz:

Es existiert für jedes $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ mindestens ein $\hat{\sigma}_i \in \Sigma_i$ mit

$$U_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i$$

Die Menge $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ ist also nicht leer.

Die Menge der besten Antworten $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ ist konvex

Da U_i linear in den Wahrscheinlichkeiten ist, gilt für beliebige zwei gemischte Strategien $\sigma_i, \sigma_i' \in \Sigma_i$ und für jedes σ_{-i} und für jedes $\lambda \in [0,1]$:

$$U_i(\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\sigma_i', \sigma_{-i}) = \lambda U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Seien nun σ_i und σ_i' zwei beste Antworten auf σ_{-i}.

Dann gilt $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ und $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$, also

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = U_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Daher gilt auch

$$U_i(\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\sigma_i', \sigma_{-i}) = U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

für alle $\lambda \in [0,1]$.

Deswegen ist auch $\lambda\sigma_i + (1-\lambda)\sigma_i'$ eine beste Antwort auf σ_{-i}.

Die Menge der besten Antworten $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ ist abgeschlossen

Betrachte für ein $\sigma_i \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ ein s_i mit $\sigma_i(s_i) > 0$.

Bezeichne die degenerierte gemischte Strategie, welche s_i mit Wahrscheinlichkeit 1 spielt, mit δ_{s_i}.

δ_{s_i} ist die Ecke von Σ_i, welche zur reinen Strategie s_i gehört.

Zu Zeigen: $\delta_{s_i} \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$.

In Worten: Falls eine gemischte beste Antwort eine reine Strategie mit positiver Wahrscheinlichkeit spielt, so ist auch diese reine Strategie eine beste Antwort.

Geometrisch bedeutet dies, dass $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ alle seine Ecken enthält.

Aufgrund der Konvexität von $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ muss $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ dann auch alle seine Kanten enhalten.

Beweis: $\sigma_i \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ mit $\sigma_i(s_i) > 0 \Rightarrow \delta_{s_i} \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$

$\sigma_i \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i}) \Rightarrow U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(\delta_{s_i}, \sigma_{-i})$

Definiere

$$\tilde{\sigma}_i(s_i') = \begin{cases} 0 & \text{falls } s_i' = s_i \\ \frac{\sigma_i(s_i')}{1-\sigma_i(s_i)} & \text{falls } s_i' \neq s_i \end{cases}$$

Dann gilt (mit einigen langweiligen Umformungen):

$$\underbrace{U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) - U_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i})}_{\geq 0 \text{ da } \sigma_i \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})} = \ldots = \frac{\sigma_i(s_i)}{1-\sigma_i(s_i)} \left(U_i(\delta_{s_i}, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\right)$$

Wegen $\sigma_i(s_i) > 0$ gilt also auch $U_i(\delta_{s_i}, \sigma_{-i}) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.

Da σ_i eine beste Antwort auf σ_{-i} ist, muss also auch s_i ein beste Antwort auf σ_{-i} sein.

$\Sigma_i = \Delta(S_i)$ # Anzahl reine Strategien

$\Sigma_i \subset [0,1]^{|S_i|}$ $\Rightarrow$ Σ_i beschränkt

$\Sigma_i^*(\sigma_{-i}) \subset \Sigma_i$ $\Rightarrow$ $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ beschränkt

Wichtige Eigenschaften von $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ in für endliche Strategienräume S_i

Wir haben nun begründet:

Falls S_i endlich viele reine Strategien enthält, ist die Menge der besten Antworten $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ für jedes Profil $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$:

- nicht leer,
- konvex und
- abgeschlossen.

beschränkt

Gemischte Strategien: Nash Gleichgewicht

Ein Profil von gemischten Strategien $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ ist ein Nash Gleichgewicht, falls

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i, i = 1, \ldots, n$$

Es gilt also für jede:n Spieler:in $i = 1, \ldots, n$:

$$\sigma_i^* \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i}^*)$$

Beispiel

$U_1(o,q) = q \cdot 3 + 0 \cdot (1-q) = 3q$

$U_1(m,q) = 0q + 3(1-q) = 3-3q$

$U_1(u,q) = 1 \cdot q + 1(1-q) = 1$

		q: l	(2): r (1−q)
	o	3 , 0	0 , 3
(1)	m	0 , 3	3 , 0
	u	1 , 1	1 , 1

kein NGG in reinen Strategien

Gesucht:

Nash Gleichgewicht(e) in reinen oder gemischten Strategien

Reines NGG:

Reine beste Antworten auf reine Strategien.

Gemischtes NGG:

Gemischte beste Antworten auf gemischte Strategien.

Strikte Dominanz mit gemischten Strategien

Betrachte nun die gemischte Strategie von (1):
$p^* = (p_o^*, p_m^*, p_u^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

beste Antwort von 1:

$$\begin{cases} m & \text{, falls } q < \frac{1}{2} \\ \{m, o\} & \text{, falls } q = \frac{1}{2} \\ o & \text{, falls } q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$U_1(P, q)$ (phase 1)

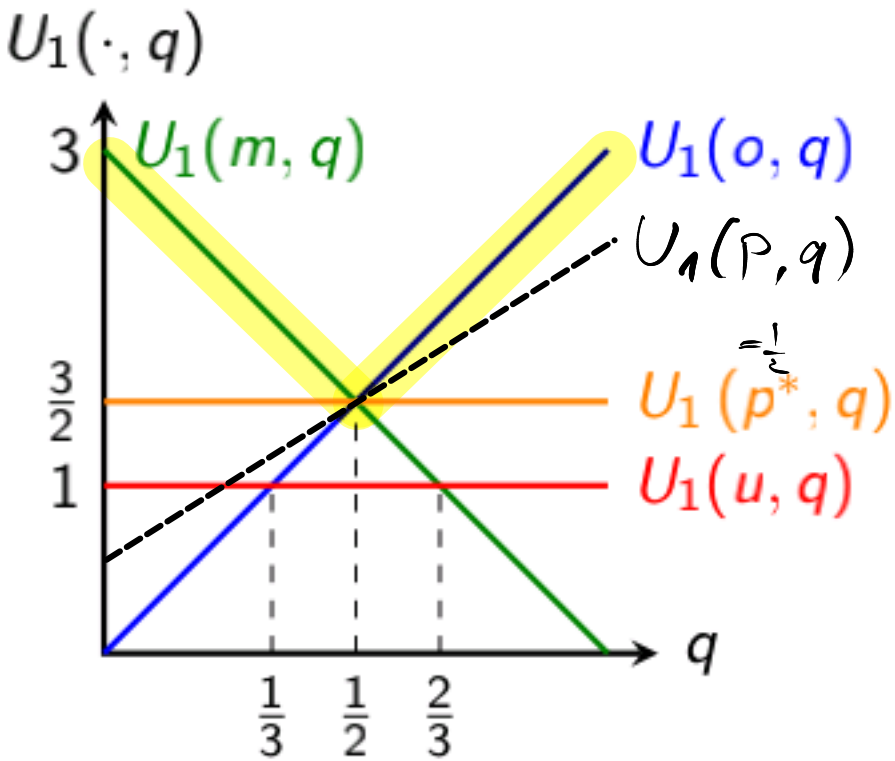
$p^* = \frac{1}{2}$ dominiert u strikt

$3 - 3q > 3q \Leftrightarrow q < \frac{1}{2}$

$3 - 3q > 1 \Leftrightarrow q < \frac{2}{3}$

$3q > 3 - 3q \Leftrightarrow q > \frac{1}{2}$

$3q > 1 \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}$



$$U_1(p^*, q) = \frac{1}{2} \cdot 3q + \frac{1}{2} \cdot (3 - 3q) + 0 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

Die Strategie u wird durch $p^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ strikt dominiert!

Existenz eines Nash Gleichgewichtes

endlich viele Spieler:innen
endlich viele Strategien.

Theorem (Nash 1950)

Jedes endliche Spiel $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$ hat mindestens ein Nash Gleichgewicht, eventuell in gemischten Strategien.

Der Beweis benutzt Kakutanis Fix-Punkt Theorem.

Existenz eines Nash Gleichgewichtes

$\sigma \in \Sigma$, σ Profil von gemischten Strategien

$\Sigma^* = \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \times \dots \times \Sigma_n^*$

$\Sigma : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_n$

Σ_i^* Menge von besten Antworten von i

Σ_i: Menge der gemischten Strategien von i

Definiere

Def Bereich → $\Sigma^* : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ ← Wertebereich

Korrespondenz

mit

$$\Sigma^*(\sigma) = (\Sigma_1^*(\sigma_{-1}), \Sigma_2^*(\sigma_{-2}), \dots, \Sigma_n^*(\sigma_{-n}))$$

Da $\Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ für jedes i nicht leer, konvex und abgeschlossen ist, gilt dies auch für Σ^*.

& beschränkt

$\sigma_i^* \in \Sigma_i^*$

Σ_i^* Vorschrift (Korrespondenz)

$\sigma_i^*(\sigma_{-i})$: beste Antwort von i

Profil von gem. Strat. von allen $j \neq i$

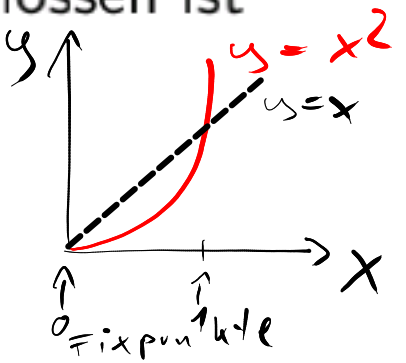
Fixpunktsatz von Kakutani

Falls $A \subset \mathbb{R}^m$ nicht leer, abgeschlossen, beschränkt und konvex ist und

$f : A \rightrightarrows A$ eine Korrespondenz ist, deren Graph abgeschlossen ist und $f(x)$ für jedes $x \in A$ nicht leer und konvex ist,

dann gibt es mindestens ein $x^* \in A$ mit $x^* \in f(x^*)$.

x^* Fixpunkt von f



Anwendung auf die beste Antwort Korrespondenz $\Sigma^* : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$:

- Σ ist nicht leer, abgeschlossen, beschränkt und konvex✓
- $\Sigma^*(\sigma)$ ist nicht leer, abgeschlossen und konvex✓

Also gibt es ein $\sigma^* \in \Sigma$ mit $\sigma^* \in \Sigma^*(\sigma^*)$.

Es gilt dann $\sigma_i^* \in \Sigma_i^*(\sigma_{-i})$ für jedes $i = 1, \ldots, n$,
σ^* ist also ein Nash Gleichgewicht.

$\sigma^* \in \Sigma^*(\tau^*)$ für $n = 2$

$(\sigma_1^*, \sigma^2) \in \Sigma_1^*(\tau_2^*) \times \Sigma_2^*(\tau_1^*)$

Falls 2 τ_2^* wählt : $\Sigma_1^*(\tau_2^*)$ Menge der besten Antworten von 1

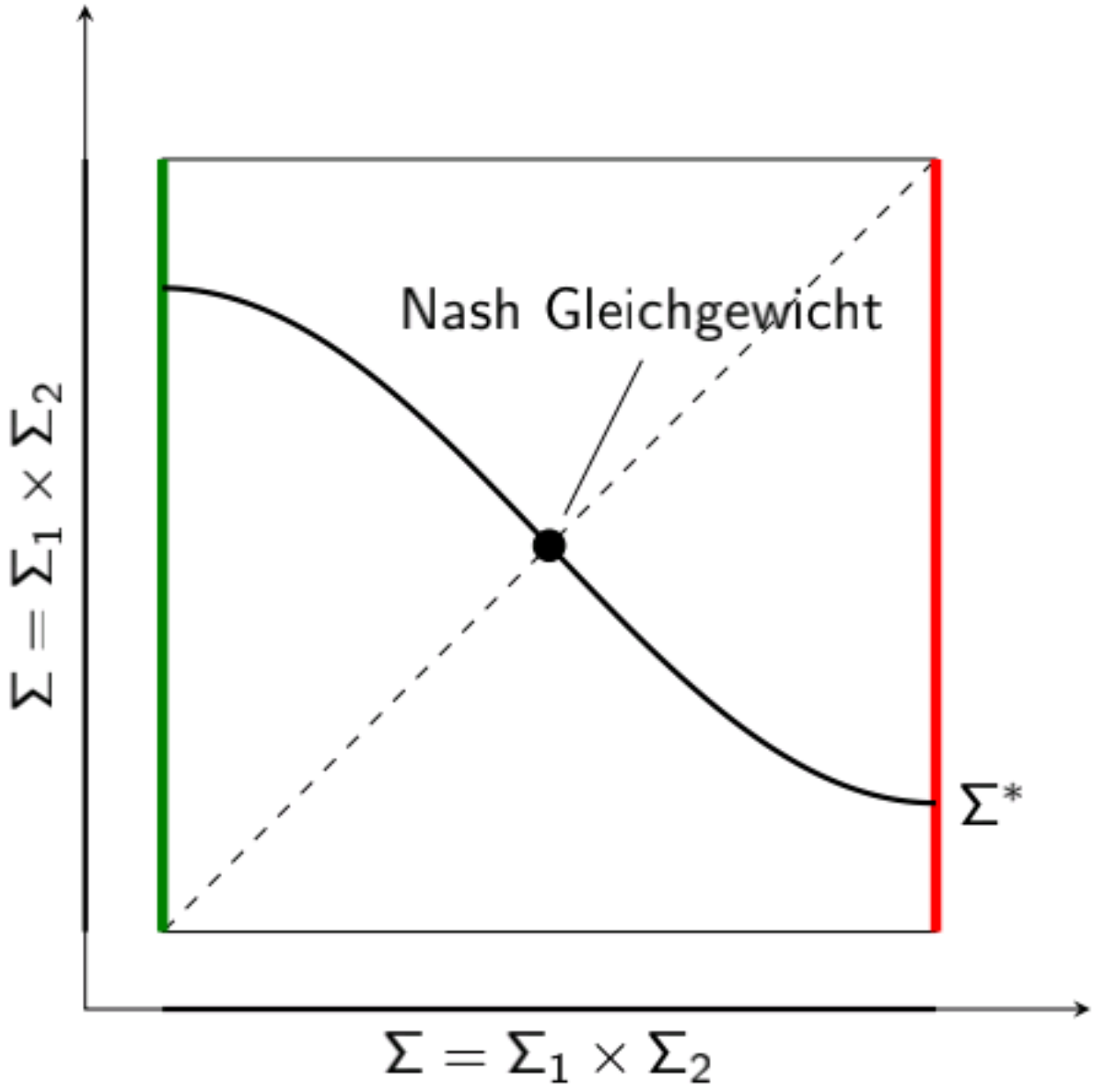
$\sigma_1^* \in \Sigma_1^*(\tau_2^*)$

$\Rightarrow \tau_1^*$ ist beste Antwort auf τ_2^*

Analog: $\tau_2^* \in \Sigma_2^*(\tau_1^*)$: τ_2^* ist beste Antwort auf τ_1^*

$\Rightarrow (\tau_1^*, \tau_2^*)$ NGG

Existenz (mindestens) eines Fixpunktes von Σ



$\Sigma^*(\sigma)$ muss für jedes σ definiert sein!

Der Graph von Σ^* muss abgeschlossen sein!

Der Graph von Σ^* darf keine Löcher haben!

Schlüsselwörter in Kapitel 1.3

- Reine und gemischte Strategie, Simplex
- von Neumann-Morgenstern-Nutzen, Erwartungsnutzen
- Min-Max- und Max-Min-Strategien in Nullsummenspielen
- Unabhängiges Mischen
- Beste Antworten auf gemischte Strategien
- Nash Gleichgewicht in gemischten Strategien
- Dominiertheit durch gemischte Strategien
- Existenz von Nash Gleichgewichten