

Matrizenalgebra

Teil 3



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.8 Gauß'sche Elimination

Beispiel 12.8.1 von Seite 553

Elementare Zeilenoperationen

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Die Treppenstufenform

Beispiel 12.8.2 von Seite 555

Aufgabe 12.8.1

12.8 Gauß'sche Elimination

Elementare Zeilenoperationen

Betrachte die Gleichung

$$2x_1 - 6x_2 + 3 = 7 \quad (1)$$

Wir können nun Operationen an dieser Gleichung vornehmen, ohne ihre Lösungsmenge zu verändern:

Addition von -3 (zu beiden Seiten): $\Leftrightarrow 2x_1 - 6x_2 = 4$

Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ (beider Seiten): $\Leftrightarrow x_1 - 3x_2 = 2 \quad (2)$

Gleichung (1) ist **genau dann** wahr, **wenn** Gleichung (2) wahr ist.

Wir schreiben $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Beispiel 12.8.1

Bestimme alle möglichen Lösungen des Systems

$$\begin{array}{rcccccccl} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \end{array}$$

Modifiziere das System dabei so, dass:

- ▶ x_1 erscheint nur in der ersten Gleichung
- ▶ x_2 erscheint nur in der ersten & zweiten Gleichung
- ▶ x_3 erscheint in allen drei Gleichungen

- ▶ Das modifizierte System muss äquivalent zum Originalsystem sein!

Beispiel 12.8.1 von Seite 553

Originalsystem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Treppenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenoperationen

Bei einem gegebenen System von linearen Gleichungen

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

bleibt nach folgenden elementaren Zeilenoperationen die Lösungsmenge unverändert:

- ▶ Addition einer Konstante
- ▶ Multiplikation mit einer Konstanten $\neq 0$
- ▶ Addition zweier Zeilen
- ▶ Vertauschen zweier Zeilen

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

heißt die $m \times n + 1$ -Matrix

$$\mathbf{A|b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

erweiterte Koeffizientenmatrix.

Die Treppenstufenform

Die jeweils nächste Zeile der Matrix muss beginnend mit dem ersten Eintrag mehr aufeinander folgende Nullen haben, als die vorherige Zeile.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Das jeweils erste Element einer Zeile, das nicht gleich null ist, heißt **führender Eintrag**.

Gauß'sches Eliminationsverfahren zur Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}|\mathbf{b}$

Benutze nun elementare Zeilenumformungen um:

2. $\mathbf{A}|\mathbf{b} \rightarrow$ Treppenstufenform
(Falls führender Eintrag in letzter Spalte: keine Lösung.)
3. Jeder führende Eintrag $\rightarrow 1$
4. Alle Felder über jedem führenden Eintrag $\rightarrow 0$
5. Rückführung in ein lineares Gleichungssystem
6. Drücke die führenden Unbekannten durch restliche Unbekannte aus
7. Wähle beliebige Werte für die restlichen Unbekannten.

Die Anzahl der Unbekannten, die frei gewählt werden können (möglicherweise gibt es keine) ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade .

Beispiel 12.8.2 von Seite 555

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

Aufgabe 12.8.1 von Seite 558

Löse die folgenden Gleichungssysteme durch Gauß'sche Elimination:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$