Übung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Teil 2

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.6 Matrizenmultiplikation

- Beispiel 12.5.3 von Seite 538
- Aufgabe 12.5.4 von Seite 540
- Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

- Potenzen von Matrizen
- Beispiel 12.6.2 von Seite 543
- Idempotente Matrizen
- Aufgabe zu Rotationsmatrizen
- Aufgabe zu Projektionsmatrizen

Beispiel 12.5.3 von Seite 538

Drei Firmen teilen sich den Markt für ein bestimmtes Gut. Firma A hat anfangs 20% des Marktes, Firma B hat 60% und Firma C hat 20%. Im Laufe des nächsten Jahres ergeben sich die folgenden Änderungen:

A: $\xrightarrow{85\%} A, \xrightarrow{5\%} B, \xrightarrow{10\%} C$;

B: $\xrightarrow{10\%} A, \xrightarrow{55\%} B, \xrightarrow{35\%} C$;

C: $\xrightarrow{10\%} A, \xrightarrow{5\%} B, \xrightarrow{85\%} C$;

Wie lauten die Marktanteile im nächsten Jahr?

Wie könnten die Marktanteile in t Jahren ausgerechnet werden?

Verifiziere, dass die Marktanteile (40%, 10%, 50%) *invariant* sind, sich also nicht mehr verändern.

Marktanteile nach einem Jahr

A_0		B_0		C_0		
85% · 20%	+	10% · 60%	+	10% · 20%	=	A_1
5% · 20%	+	55% · 60%	+	5% · 20%	=	B_1
10% · 20%	+	35% · 60%	+	85% · 20%	=	C_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 85\% & 10\% & 10\% \\ 5\% & 55\% & 5\% \\ 10\% & 35\% & 85\% \end{pmatrix}}_{\text{Transitionsmatrix } T} \begin{pmatrix} 20\% \\ 60\% \\ 20\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\% \\ 35\% \\ 40\% \end{pmatrix}$$

x_0 x_1 x_1

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = T \cdot T \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Marktanteile nach einem Jahr

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Marktanteile nach zwei Jahren

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Marktanteile nach t Jahren

$$\begin{pmatrix} A_t \\ B_t \\ C_t \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Invariante Verteilung: $(40\%, 10\%, 50\%)$?

$$\begin{pmatrix} 85\% & 10\% & 10\% \\ 5\% & 55\% & 5\% \\ 10\% & 35\% & 85\% \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40\% \\ 10\% \\ 50\% \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 85\% \cdot 40\% + 10\% \cdot 10\% + 10\% \cdot 50\% \\ 5\% \cdot 40\% + 55\% \cdot 10\% + 5\% \cdot 50\% \\ 10\% \cdot 40\% + 35\% \cdot 10\% + 85\% \cdot 50\% \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 34\% + 1\% + 5\% \\ 2\% + 5{,}5\% + 2{,}5\% \end{matrix} = \begin{pmatrix} 40\% \\ 10\% \\ 50\% \end{pmatrix}$$

Berechnung des invarianten Vektors

$$\underset{n \times n}{T} \cdot \underset{n \times 1}{x} = \underset{n \times 1}{x} = \underset{}{I} \cdot x$$

$\Leftrightarrow \quad T \cdot x - I \cdot x = 0$ ← Nullvektor

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(T - I)}_{A} \cdot x = \underbrace{0}_{b}$

$$\left(\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}55 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}85 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & -0{,}45 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & -0{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zusätzlich

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

warum muss die Tabelle mit den Übergangswkeiten transponiert werden?

$$\left(\text{Tabelle}\right)^{\prime} x_0 = x_1$$

$$(x_0)^{\prime}\left(\text{Tabelle}\right) = (x_1)^{\prime}$$

Aufgabe 12.5.4 von Seite 540

Schreibe die folgenden Gleichungssysteme als Matrizengleichungen:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2 Zeilen = 2 Gleichungen → 2×2 ← 2 Spalten = 2 Variablen

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3×3

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2×3 · 3×1 = 2×1

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

Bestimme alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot a + 2\cdot c & 1\cdot b + 2d \\ 2\cdot a + 3\cdot c & 2\cdot b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a + 2b & 2a + 3b \\ 1c + 2d & 2c + 3d \end{pmatrix}$$

$a + 2c \overset{!}{=} a + 2b \iff b = c$

$b + 2d \overset{!}{=} 2a + 3b \quad | -b$

$\iff 2d = 2a + 2b \quad | : 2$

$\iff d = a + b$

$2a + 3c \overset{!}{=} c + 2d \quad | -c$

$2a + 2c = 2d \quad | : 2$

$\iff a + c = d$

$2b + 3d \overset{!}{=} 2c + 3d \quad | -3d$

$\iff 2b = 2c \iff b = c$

Potenzen von Matrizen

Wenn $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix ist, können wir schreiben:

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2, \ \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3, \ \ldots$$

bzw.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$$

Beispiel 12.6.2 von Seite 543

$$A^n \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ und vermute $\mathbf{A}^n$!

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-1)1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \underbrace{A\cdot A}_{A^2}\cdot A = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für <u>alle</u> n

durch vollst. Induktion

$n=2$: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Nehme an, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für <u>ein</u> n gilt.

dann gilt auch $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-n)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-n)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ✓

Idempotente Matrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ heißt **idempotent**, falls $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Welche Bedingungen müssen für die Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten, sodass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

idempotent ist?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ba+cb & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= a \\ (a+c)b &= b \\ (a+c)b &= b \\ b^2+c^2 &= c \end{aligned}$$

$b = 0$ oder $a + c = 1$

$$a^2 + b^2 = a$$

$$\left.\begin{aligned}(a+c)b &= b\\ (a+c)b &= b\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &b = 0 \quad \text{oder} \\ &a + c = 1\end{aligned}$$

$$b^2 + c^2 = c$$

Fall $b = 0$

$$a^2 = a \iff \begin{aligned} &a = 0 \quad \text{oder} \\ &a = 1\end{aligned}$$

$$c^2 = c \iff \begin{aligned} &c = 0 \quad \text{oder} \\ &c = 1\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fall $b \neq 0 \Rightarrow c = 1 - a$

$$a^2 - a + b^2 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - b^2} \quad \text{falls } b^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\iff -\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - b^2} & b \\ b & \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - b^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - b^2} & b \\ b & \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - b^2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe zu Rotationsmatrizen

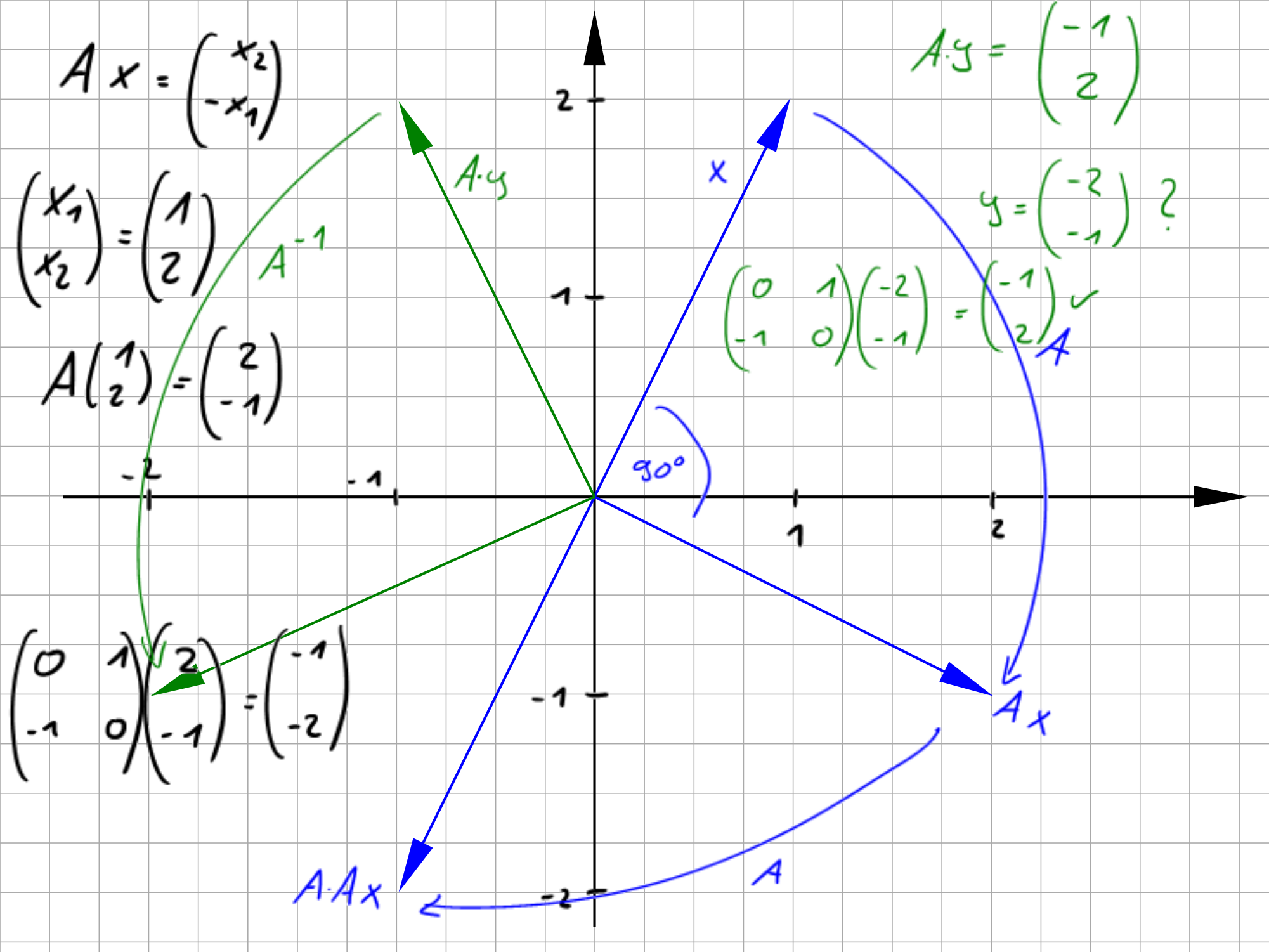
Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechne $\mathbf{Ax}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

b) Zeichne für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Vektoren $\mathbf{x}$ und $A\mathbf{x}$ in ein Koordinatensystem ein.

c) Welcher Vektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ löst $\mathbf{Ay} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ -1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$


$Ax = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$A \cdot y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$y = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$?
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓
A
A^{-1}
A·y
x
90°
A_x
$A \cdot A_x$
A
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2

Aufgabe zu Projektionsmatrizen

a) löse

$P \cdot P = P$

$\Rightarrow$ z.B. $a = \frac{4}{5}$

Es sei $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Welchen Wert muss a haben, damit $\mathbf{P}$ idempotent ist?

b) Berechne $\mathbf{Px}$ für den Vektor $\mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}$.

c) Berechne für drei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ Deiner Wahl $\mathbf{Px}$, $\mathbf{Py}$ und $\mathbf{Pz}$ und zeichne diese sechs Punkte in ein Koordinatensystem.

d) Argumentiere grafisch, warum $\mathbf{P}$ eine (orthogonale) Projektionsmatrix ist.

e) Finde mindestens eine Lösung für $\mathbf{Px} = \binom{2}{1}$.

f) Gibt es eine Lösung für $\mathbf{Px} = \binom{1}{2}$?

g) Ist $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{P}$ ebenfalls eine Projektionsmatrix?

h) Argumentiere, warum eine beliebige Projektionsmatrix idempotent sein muss.

b) berechne

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

c)

$$= x_1 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = x_1 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left[x_1 \cdot \frac{2}{5} + x_2 \cdot \frac{1}{5} \right]}_{=1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Suche x_1, x_2, so dass $\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = 1 \quad | \cdot 5$

$\Leftrightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 5 \quad | -2x_1$

$\Leftrightarrow \quad x_2 = 5 - 2x_1$

Probe $x_1 = 1 \rightsquigarrow x_2 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} 3 \\ \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{5} \\ \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

alternativ $x_1 = 0 \rightsquigarrow x_2 = 5$

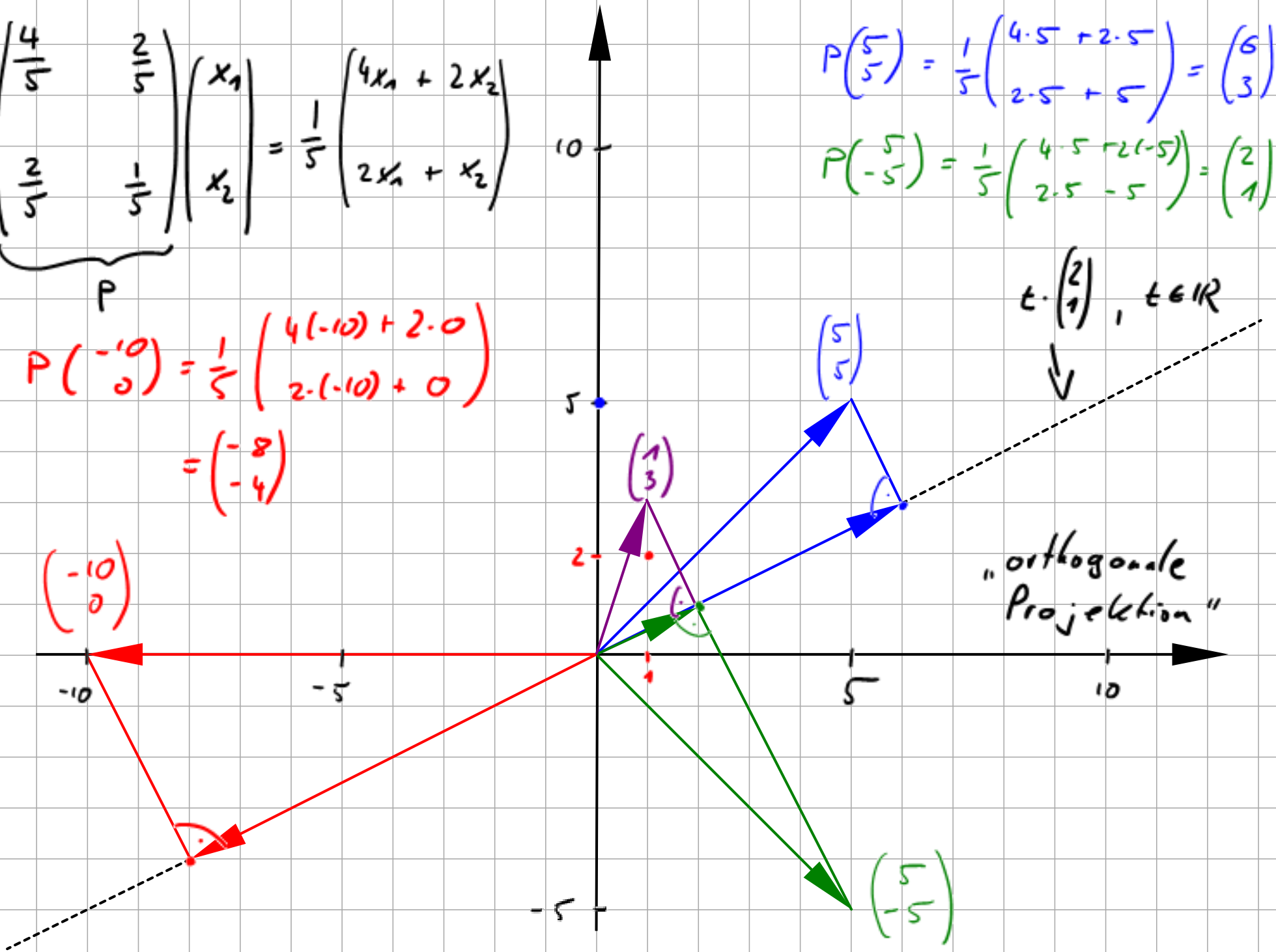
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4(-10) + 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-10) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 5 + 2\cdot 5 \\ 2\cdot 5 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 5 + 2(-5) \\ 2\cdot 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$



„orthogonale Projektion"

f) Suche x_1, x_2, so dass $Px = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\cdot 5$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	$\cdot 5$

4	2	5	$\cdot(-\frac{1}{2})$
2	1	10	

4	2	5
0	0	$\frac{15}{2}$

$2+4\cdot(-\frac{1}{2})$, $1+2\cdot(-\frac{1}{2})$, $10+5(-\frac{1}{2})$

$$4x_1 + 2x_2 = 5$$
$$0x_1 + 0x_2 = \frac{15}{2}$$

Diese Gleichung kann nicht erfüllt sein

$\Rightarrow$ es gibt keine Lsg.

Es gibt kein (x_1, x_2), so dass $P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ist $Q = I - P$ auch eine Projektionsmatrix?

$$I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Projektionsmatrizen sind idempotent.

Ist Q idempotent?

Es gilt $P \cdot P = P$

$$Q \cdot Q \stackrel{?}{=} Q \quad \Leftrightarrow \quad (I - P)(I - P) = I \cdot I - I \cdot P - P \cdot I + P \cdot P$$

$$= I - P - P + P$$

$$= I - P = Q \quad \checkmark$$

Warum muss eine Projektions-Matrix idempotent sein?

Eine Projektion einer Projektion muss wieder eine Projektion sein.

$$\underbrace{P \; P_x}_{P \cdot P = P} = P_x$$

$\rightsquigarrow$ P ist idempotent.