

Matrizenalgebra

Teil 2



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.6 Matrizenmultiplikation

Beispiel 12.5.3 von Seite 538

Aufgabe 12.5.4 von Seite 540

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Potenzen von Matrizen

Beispiel 12.6.2 von Seite 543

Idempotente Matrizen

Aufgabe zu Rotationsmatrizen

Aufgabe zu Projektionsmatrizen

Beispiel 12.5.3 von Seite 538

Drei Firmen teilen sich den Markt für ein bestimmtes Gut. Firma A hat anfangs 20% des Marktes, Firma B hat 60% und Firma C hat 20%. Im Laufe des nächsten Jahres ergeben sich die folgenden Änderungen:

$$A: \xrightarrow{85\%} A, \xrightarrow{5\%} B, \xrightarrow{10\%} C;$$

$$B: \xrightarrow{10\%} A, \xrightarrow{55\%} B, \xrightarrow{35\%} C;$$

$$C: \xrightarrow{10\%} A, \xrightarrow{5\%} B, \xrightarrow{85\%} C;$$

Wie lauten die Marktanteile im nächsten Jahr?

Wie könnten die Marktanteile in t Jahren ausgerechnet werden?

Verifiziere, dass die Marktanteile (40%, 10%, 50%) *invariant* sind, sich also nicht mehr verändern.

Aufgabe 12.5.4 von Seite 540

Schreibe die folgenden Gleichungssysteme als Matrizengleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

Bestimme alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Potenzen von Matrizen

Wenn **A** eine quadratische Matrix ist, können wir schreiben:

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2, \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3, \dots$$

bzw.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$$

Beispiel 12.6.2 von Seite 543

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ und vermute $\mathbf{A}^n$!

Idempotente Matrizen

Eine quadratische Matrix **A** heißt **idempotent**, falls $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

Welche Bedingungen müssen für die Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten, sodass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

idempotent ist?

Aufgabe zu Rotationsmatrizen

Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

- a) Berechne $\mathbf{Ax}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
- b) Zeichne für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{Ax}$ in ein Koordinatensystem ein.
- c) Welcher Vektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ löst $\mathbf{Ay} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Aufgabe zu Projektionsmatrizen

Es sei $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ gegeben.

- a) Welchen Wert muss a haben, damit $\mathbf{P}$ idempotent ist?
- b) Berechne $\mathbf{P}\mathbf{x}$ für den Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
- c) Berechne für drei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ Deiner Wahl $\mathbf{P}\mathbf{x}$, $\mathbf{P}\mathbf{y}$ und $\mathbf{P}\mathbf{z}$ und zeichne diese sechs Punkte in ein Koordinatensystem.
- d) Argumentiere grafisch, warum $\mathbf{P}$ eine (orthogonale) Projektionsmatrix ist.
- e) Finde mindestens eine Lösung für $\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- f) Gibt es eine Lösung für $\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?
- g) Ist $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{P}$ ebenfalls eine Projektionsmatrix?
- h) Argumentiere, warum eine beliebige Projektionsmatrix idempotent sein muss.