Übung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Teil 1

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

Matrizen und Vektoren

Aufgabe 12.1.1 von Seite 527

Aufgabe 12.1.3 von Seite 527

12.2 Systeme linearer Gleichungen

Beispiel 12.2.1 von Seite 528

Aufgabe 12.2.4 von Seite 529

12.3 Matrizenaddition

Aufgabe 12.3.2 von Seite 532

12.4 Vektoralgebra

Aufgabe 12.4.3 von Seite 535

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

Lineare Funktionen

Aufgabe 1 zu linearen Funktionen

Aufgabe 12.1.1 von Seite 527

Bestimme die Ordnung von jeder der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.10 & 0.10 \\ 0.05 & 0.55 & 0.05 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

m, n natürliche Zahlen
$m, n \in \mathbb{N}$

j: Spaltenindex

i: Zeilenindex

$m \times n$ ← Anzahl der Spalten

↑ Anzahl der Zeilen

Aufgabe 12.1.3 von Seite 527

$u, v \in \mathbb{R}$

Bestimme für welche Werte von u und v die folgende Gleichheit gilt:

$$\begin{pmatrix} (1-u)^2 & v^2 & 3 \\ v & 2u & 5 \\ 6 & u & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & u \\ v & -3v & u-v \\ 6 & v+5 & -1 \end{pmatrix}$$

$(1-u)^2 = 4 \iff 1-u = 2$ oder $1-u = -2$

$\iff 1-2 = u$ oder $1+2 = u \iff u = -1$ oder $u = 3$

$2u = 2 \cdot 3 = 6 = -3v \iff -2 = v$

Lösung $u = 3$, $v = -2$

Beispiel 12.2.1 von Seite 528

a) Schreibe das System von Gleichungen wenn $n = m = 3$ und $a_{ij} = i + j$ für $i, j = 1, 2, 3$, während $b_i = i$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Verifiziere, dass $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$ eine Lösung ist, aber dass $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$ keine Lösung ist.

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

2. Koeffizienten a_{ij} berechnen:

$a_{11} = 1+1 = 2 \quad a_{12} = 3 \quad a_{13} = 4$

$a_{21} = 2+1 = 3 \quad a_{22} = 2+2 = 4 \quad a_{23} = 2+3 = 5$

$a_{31} = 3+1 = 4 \quad a_{32} = 3+2 = 5$

$a_{33} = 3+3 = 6$

3. Rechte Seite b_i:

$b_1 = 1$

$b_2 = 2$

$b_3 = 3$

4. System hinschreiben:

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2$

$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \quad \text{I}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \quad \text{II}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \quad \text{III}$$

ist $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$ eine Lösung?

↳ I: $2 \cdot 2 + 3(-1) + 4 \cdot 0 = 4 - 3 = 1$ ✓

II: $3 \cdot 2 + 4(-1) + 5 \cdot 0 = 6 - 4 = 2$ ✓

III: $4 \cdot 2 + 5(-1) + 6 \cdot 0 = 8 - 5 = 3$ ✓

ist $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$ eine Lösung?

I: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 4 - 4 = 0 \neq 1$ ↯

Herleitung der Lösung

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \quad + (-\tfrac{3}{2})$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \quad + (-2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$0x_1 - \tfrac{1}{2}^{*}x_2 - 1^{*}x_3 = \tfrac{1}{2}^{*} \quad (3+(-\tfrac{3}{2})\cdot 2)$$
$$0x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 1 \quad (4+(-2)\cdot 2,\ 5+(-2)\cdot 3,\ 6+(-2)\cdot 4,\ 3+(-2)\cdot 1) \quad + (-2)$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$-\tfrac{1}{2}x_2 - x_3 = \tfrac{1}{2}$$
$$+0x_2 + 0x_3 = 0 \quad (-1+(-2)\cdot(-\tfrac{1}{2}),\ -2+(-2)(-1),\ 1+(-2)\cdot\tfrac{1}{2})$$

$2\cdot(-\tfrac{3}{2}) = -3$

$4+(-\tfrac{3}{2})\cdot 3 = 4+(-\tfrac{9}{2})$

$= \tfrac{8}{2} - \tfrac{9}{2} = -\tfrac{1}{2}$ *

$5+(-\tfrac{3}{2})4 = 5+(-\tfrac{12}{2})$

$= 5-6 = -1$*

$2+(-\tfrac{3}{2})\cdot 1 = 2-\tfrac{3}{2}$

$= \tfrac{4}{2} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}$*

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$-\frac{1}{2}x_2 - x_3 = \frac{1}{2}$$

$x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ (λ kann frei gewählt werden)

$$2x_1 + 3x_2 = 1 - 4\cdot\lambda$$
$$-\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} + \lambda \quad |\cdot(-2)$$
$$x_3 = 0 + \lambda$$

$$2x_1 + 3x_2 = 1 - 4\lambda$$
$$x_2 = -1 - 2\lambda$$
$$x_3 = \lambda$$

Falls $\lambda = 0$

$2x_1 + 3x_2 = 1$

$x_2 = -1$

$x_3 = 0$

$2x_1 + 3(-1) = 1$

$2x_1 - 3 = 1$

$2x_1 = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow x_1 = 2$

Aufgabe 12.2.4 von Seite 529

Schreibe das System von Gleichungen auf, wenn $n = m = 4$ und $a_{ij} = 1$ für alle $i \neq j$, während $a_{ii} = 0$ für $i = 1, \ldots, 4$.

Für die rechten Seiten gilt $b_i = 3 \cdot i$ für $i = 1, \ldots, 4$.

Wie lautet die Lösung des Systems?

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$		
$i=1$	$0x_1$	$1x_2$	$1x_3$	$1x_4$	$=$	3
$i=2$	$1x_1$	$0x_2$	$1x_3$	$1x_4$	$=$	6
$i=3$	$1x_1$	$1x_2$	$0x_3$	$1x_4$	$=$	9
$i=4$	$1x_1$	$1x_2$	$1x_3$	$0x_4$	$=$	12

$$
\begin{array}{lllll}
+ & x_2 + x_3 + x_4 & = 3 & \Leftrightarrow & 10 - x_1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 10 - 3 = 7 \\
+ & \overbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}^{=10} - x_2 & = 6 & \Leftrightarrow & 10 - x_2 = 6 \Leftrightarrow 10 - 6 = x_2 \\
 & & & & \Rightarrow x_2 = 4 \\
+ & x_1 + x_2 + x_4 & = 9 & \Leftrightarrow & 10 - x_3 = 9 \Leftrightarrow x_3 = 10 - 9 = 1 \\
+ & \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{=10} - x_4 & = 12 & \Leftrightarrow & 10 - x_4 = 12 \Leftrightarrow x_4 = 10 - 12 = -2
\end{array}
$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Lösung : $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$

Aufgabe 12.3.2 von Seite 532

$-B = (-1) \cdot B$

$A - B = A + (-1) \cdot B$

Berechne $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ und $5\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 2×3

$$A+B = \begin{pmatrix} 0+1 & 1+(-1) & -1+5 \\ 2+0 & 3+1 & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 0-1 & 1-(-1) & -1-5 \\ 2-0 & 3-1 & 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5A-3B = \begin{pmatrix} 5\cdot 0-3\cdot 1 & 5\cdot 1-3(-1) & 5(-1)-3\cdot 5 \\ 5\cdot 2-3\cdot 0 & 5\cdot 3-3\cdot 1 & \underbrace{5\cdot 7}_{35}-\underbrace{3\cdot 9}_{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -20 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.4.3 von Seite 535

Bestimme x, y und z, wenn

$$3(x, y, z) + 5(-1, 2, 3) = (4, 1, 3)$$

$\Leftrightarrow \quad (3x - 5, 3y + 10, 3z + 15) = (4, 1, 3)$

$\Leftrightarrow \quad 3x - 5 = 4$
$3y + 10 = 1$
$3z + 15 = 3$

$\Leftrightarrow \quad 3x = 4 + 5 = 9$
$3y = 1 - 10 = -9$
$3z = 3 - 15 = -12$

$\Leftrightarrow \quad x = 3$
$y = -3$
$z = -4$

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

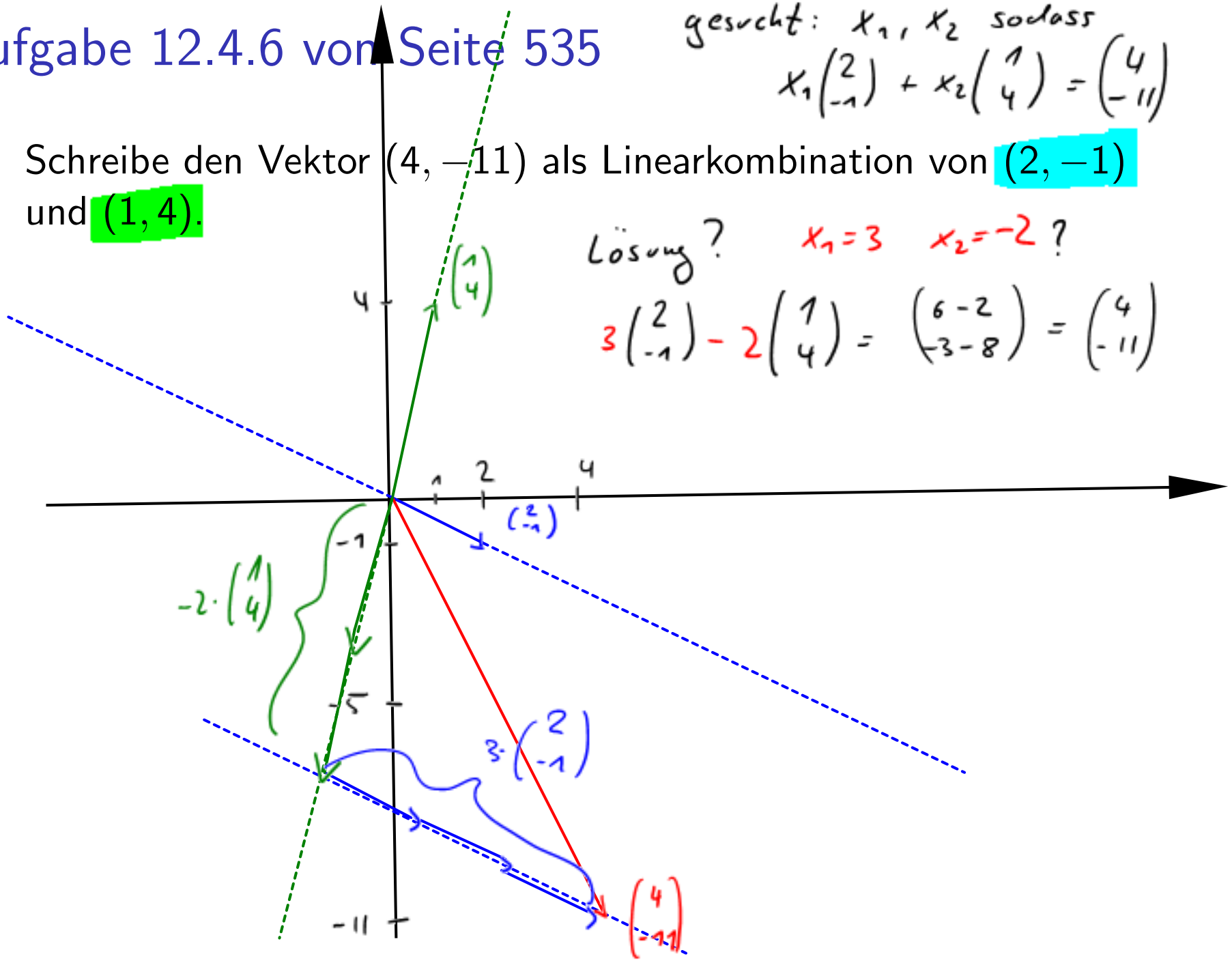
Schreibe den Vektor $(4, -11)$ als Linearkombination von $(2, -1)$ und $(1, 4)$.

gesucht: x_1, x_2 sodass

$$x_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}$$

Lösung? $x_1 = 3$ $x_2 = -2$?

$$3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-2\\-3-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-11\end{pmatrix}$$



Aufgabe 1 zu linearen Funktionen

$g(x+y) = A(x+y)$
$= Ax + Ay$
$= g(x) + g(y)$

Definition: Lineare Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **lineare Funktion**, falls die folgenden zwei Bedingungen gelten:

- **Homogenität**: $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- **Additivität**: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

$g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Definiere für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ die Funktion

$= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

Is g eine lineare Funktion?

$g(t \cdot x) = \begin{pmatrix} tx_1 + 3tx_3 \\ 2tx_1 + tx_2 + 5tx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(x_1 + 3x_3) \\ t(2x_1 + x_2 + 5x_3) \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$ ($g(x)$)