

Matrizenalgebra



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

- 12.1 Matrizen und Vektoren
- 12.2 Systeme linearer Gleichungen
- 12.3 Matrizenaddition
- 12.4 Vektorenalgebra
- 12.5 Matrizenmultiplikation
- 12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation
- 12.7 Die Transponierte
- 12.8 Gauß'sche Elimination → Übung
- 12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren
- 12.10 Geraden und Ebenen

12.1 Matrizen und Vektoren

Matrix

Tabelle von reellen Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix **A** hat die **Ordnung** $m \times n$.

Die Einträge a_{ij} der Matrix heißen **Elemente**.

Da die Elemente reelle Zahlen sind, schreiben wir auch $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Wir benutzen fettgedruckte Großbuchstaben für Matrizen.

Beispiel 12.1.1

Von welcher Ordnung sind die vier folgenden Matrizen?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = (-1, 2, \sqrt{3}, 16)$$

2 x 2 **1 x 4**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \\ 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

4 x 2 **3 x 1**

# Zeilen # Spalten

Vektor

Falls eine Matrix nur aus einer Zeile besteht: **Zeilenvektor**.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Wenn die Matrix nur aus einer Spalte besteht: **Spaltenvektor**.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die Einträge eines Vektors nennen wir **Komponenten**.

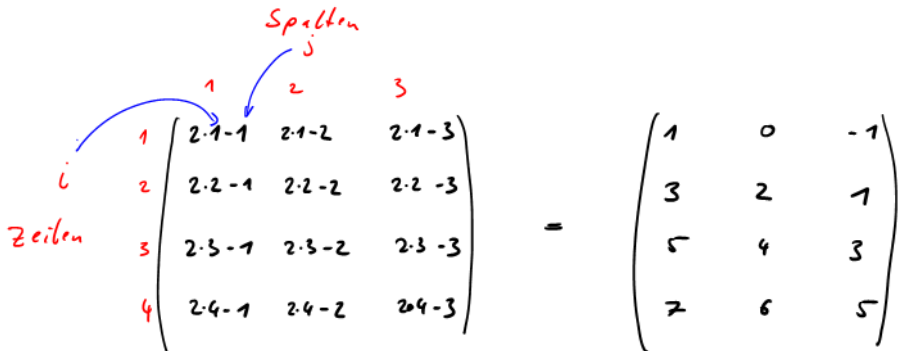
Die Anzahl der Komponenten nennen wir **Dimension**.

Wir schreiben $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Wir benutzen fettgedruckte Kleinbuchstaben für Vektoren.

Beispiel 12.1.2

Konstruiere die 4×3 Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4 \times 3}$ mit $a_{ij} = 2i - j$ für $i = 1, \dots, 4$ und $j = 1, 2, 3$



Handwritten construction of the matrix $\mathbf{A}$:

Rows are labeled i (1, 2, 3, 4) and columns are labeled j (1, 2, 3). The formula $a_{ij} = 2i - j$ is used to calculate the entries.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 & 2 \cdot 1 - 2 & 2 \cdot 1 - 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 & 2 \cdot 2 - 2 & 2 \cdot 2 - 3 \\ 2 \cdot 3 - 1 & 2 \cdot 3 - 2 & 2 \cdot 3 - 3 \\ 2 \cdot 4 - 1 & 2 \cdot 4 - 2 & 2 \cdot 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lineares Gleichungssystem

$$3x_1 + 2x_2 + \textcolor{red}{1}x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite (Ordnung 2×1):

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×4):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

↑ b

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen **A** und **B** sind **gleich**, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, wenn sie dieselbe Ordnung ($m \times n$) haben und wenn für alle für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ gilt $a_{ij} = b_{ij}$.

Wenn **A** und **B** nicht gleich sind, schreiben wir $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Beispiel 12.1.5

Unter welchen Bedingungen gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 & t-1 \\ 2t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 2v \\ u+1 & t+w \end{pmatrix} ?$$

Handwritten notes: A blue arrow points from the top-right element $t-1$ to $t=3$. The top-left element 3 and the top-right element t are highlighted in cyan.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2v \\ u+1 & 3+w \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: The bottom-left element 6 is highlighted in green. A green arrow points from the bottom-left element $u+1$ to $u=5$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2v \\ 6 & 3+w \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: The top-right element 2 is highlighted in yellow. An orange arrow points from the top-right element $2v$ to $v=1$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3+w \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: The bottom-right element 5 is highlighted in magenta. A purple arrow points from the bottom-right element $3+w$ to $w=2$.

12.2 Systeme linearer Gleichungen

12.2 Systeme linearer Gleichungen

m Gleichungen in n Unbekannten ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

2. Gleichung
sow. 2. Zeile

Bezeichnungen:

n. Spalte

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: **unbekannte Variablen**

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: **Koeffizienten** des Systems

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: **rechte Seiten**

a_{ij} ist der Koeffizient der Variablen x_j in der i -ten Gleichung.

Beispiel 12.2.2

Die Koeffizientenmatrix des Systems

$$\begin{array}{rrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Der Vektor der rechten Seite lautet $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

12.3 Matrizenaddition

Matrizenaddition

Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ zwei Matrizen derselben Ordnung sind, definieren wir die **Summe** von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ als die $m \times n$ Matrix $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Damit ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn α eine reelle Zahl ist, definieren wir $\alpha\mathbf{A}$ durch

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m \times n} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

Wir definieren $-\mathbf{A}$ durch $(-1) \cdot \mathbf{A}$.

Beispiel 12.3.1

Berechne $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$ und $(-\frac{1}{2})\mathbf{B}$, wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 2×3

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+2 \\ 4+1 & -3+0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 0 & -\frac{1}{2} \cdot 1 & -\frac{1}{2} \cdot 2 \\ -\frac{1}{2} \cdot 1 & -\frac{1}{2} \cdot 0 & -\frac{1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Regeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

$$-A = (-1) \cdot A$$

Seien **A**, **B** und **C** beliebige $m \times n$ Matrizen und α und β seien reelle Zahlen.

Außerdem bezeichne **0** die $m \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, die sogenannte **Nullmatrix**.

Dann gilt:

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

(e) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

(f) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

12.4 Vektorenalgebra

Vektoroperationen

Da Vektoren spezielle Matrizen sind, gelten die Rechenregeln für Matrizen auch für Vektoren:

1. Zwei n -Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind **gleich**, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, wenn all ihre Komponenten gleich sind, $a_i = b_i$ für $i = 1, \dots, n$.
2. Für zwei n -Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist die **Summe** $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ein Vektor mit den Summen der Komponenten, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})_i = a_i + b_i$ für $i = 1, \dots, n$.
3. Wenn $\mathbf{a}$ ein n -Vektor ist und t eine reelle Zahl, dann ist $t\mathbf{a}$ ein Vektor mit den **t -fachen Komponenten** von $\mathbf{a}$, $(t\mathbf{a})_i = ta_i$ für $i = 1, \dots, n$.
4. Die **Differenz** zwischen zwei n -Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist definiert als $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}$.

Linearkombination

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei n -Vektoren und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann heißt der n -Vektor $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ **Linearkombination** von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

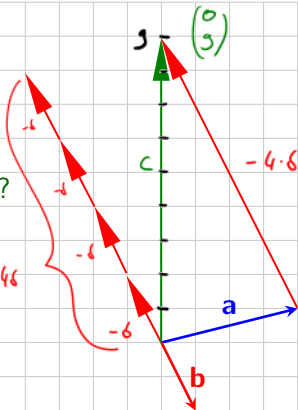
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - 4\mathbf{b} = ?$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4\mathbf{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 + (-4) \cdot 1 \\ 1 + (-4) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt: Beispiel

Anna kauft 5kg Äpfel, 3kg Bananen, 6kg Kirschen und 7kg Datteln.

Der Mengenvektor lautet:

$$\mathbf{x} = (5, 3, 6, 7)$$

Die Preise lauten 4€ pro kg Äpfel, 5€ pro kg Bananen, 3€ pro kg Kirschen und 8€ pro kg Datteln.

Der Preisvektor lautet:

$$\mathbf{p} = (4, 5, 3, 8)$$

Wie viel Geld muss Anna bezahlen?

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} &= 5 \cancel{\text{kg}} \cdot 4 \frac{\text{€}}{\cancel{\text{kg}}} + 3 \cancel{\text{kg}} \cdot 5 \frac{\text{€}}{\cancel{\text{kg}}} + 6 \cancel{\text{kg}} \cdot 3 \frac{\text{€}}{\cancel{\text{kg}}} + 7 \cancel{\text{kg}} \cdot 8 \frac{\text{€}}{\cancel{\text{kg}}} = \underbrace{20 + 15}_{35} + \underbrace{18 + 56}_{74} \\ &= 109 \text{ €} \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der n -Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ ist definiert als}$$

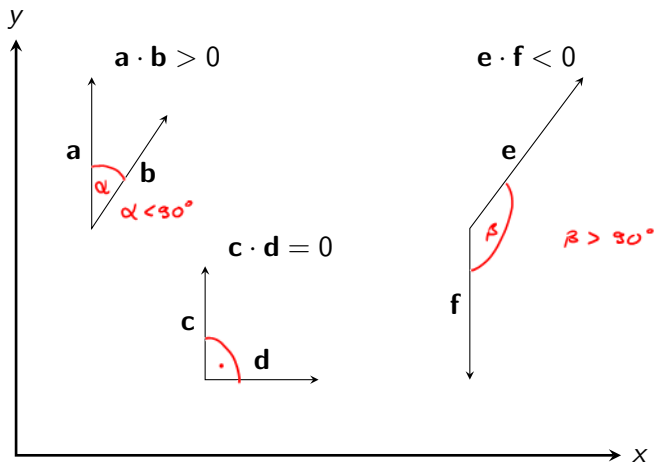
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Handwritten red annotations:
- An arrow points from the word "Endwert" to the upper index n .
- An arrow points from the word "Startwert" to the lower index $i=1$.
- An arrow points from the word "Laufindex" to the variable i in the denominator of the summation.

Bemerkungen:

- ▶ Das Skalarprodukt ist eine Zahl (ein „Skalar“).
- ▶ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist nur dann definiert, wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die gleiche Dimension haben.

das Vorzeichen des Skalarprodukts



Skalarprodukt: Beispiel

$$\begin{aligned}dx &= y - x = (6-5, 5-3, 5-6, 5-7) \\ &= (1, 2, -1, -2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dx \cdot p &= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 8 \\ &= 4 + 10 - 3 - 16 \\ &= 14 - 13 = -5 < 0\end{aligned}$$

Wenn Anna nicht den Mengenvektor

$$x = (5, 3, 6, 7)$$

sondern den Mengenvektor

$$y = (6, 5, 5, 5)$$

kauft, steigen oder sinken ihre Ausgaben bei gegebenen Preisvektor

$$p = (4, 5, 3, 8)?$$

$$y \cdot p - x \cdot p = (y - x) \cdot p = dx \cdot p = -5$$

$$y \cdot p = x \cdot p - 5 = 109 - 5 = 104$$

12.5 Matrizenmultiplikation

12.5 Matrizenmultiplikation

Betrachte die folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lcl} z_1 & = & y_1 + 0 \cdot y_2 + 3y_3 \\ z_2 & = & 2y_1 + y_2 + 5y_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 + 3x_2 \\ y_2 & = & 2x_1 + 5x_2 \\ y_3 & = & 6x_1 + 2x_2 \end{array}$$

Mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie lautet das Gleichungssystem, welches z_1 und z_2 als Ausdrücke mit x_1 und x_2 darstellt?

Wie lautet die entsprechende Koeffizientenmatrix?

12.5 Matrizenmultiplikation

$$z_1 = 1y_1 + 0y_2 + 3y_3$$

$$z_2 = 2y_1 + 1y_2 + 5y_3$$

und

$$y_1 = 1x_1 + 3x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + 5x_2$$

$$y_3 = 6x_1 + 2x_2$$

$$z_1 = 1 \cdot (1x_1 + 3x_2) + 0(2x_1 + 5x_2) + 3(6x_1 + 2x_2)$$

$$z_2 = 2 \cdot (1x_1 + 3x_2) + 1(2x_1 + 5x_2) + 5(6x_1 + 2x_2)$$

$$z_1 = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 6)x_1 + (1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 2)x_2$$

$$z_2 = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 6)x_1 + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 2)x_2$$

$$z_1 = 19x_1 + 9x_2$$

$$z_2 = 34x_1 + 21x_2$$

$$C = \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ 34 & 21 \end{pmatrix} = A \cdot B$$

12.5 Matrizenmultiplikation

$$\underset{m \times n}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n \times p}{\mathbf{B}} = \underset{m \times p}{\mathbf{C}}$$

Nehme an, dass $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times \underline{n}}$ und dass $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\underline{n} \times p}$.

Dann ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ die $m \times p$ Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$, deren Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

der i -ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j -ten Spalte von $\mathbf{B}$ ist.

12.5 Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$!

Spezialfall: Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{Ax}$!

Gleichungssysteme in Matrizenform: Beispiel

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$

$$7x_1 - 2x_2 = 2$$

Definiere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Eine Lösung (x_1, x_2) von

$$3x_1 + 4x_2 = 5$$

$$7x_1 - 2x_2 = 2$$

sind also zwei Gewichte x_1 und x_2 für die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,
sodass die Linearkombination $x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt.

Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

Definiere für das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

A, **x** und **b** mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Wenn **A**, **B** und **C** Matrizen sind, deren Ordnungen so sind, dass die gegebenen Operationen definiert sind, und wenn α ein beliebiger Skalar ist, dann gilt:

- ▶ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- ▶ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- ▶ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- ▶ $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$

Vorsicht:

Es gilt im Allgemeinen **nicht**: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$!

Die Einheitsmatrix der Ordnung n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Für eine beliebige $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ gilt $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Ebenso gilt für $\mathbf{B}_{n \times m}$: $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

Unterschiede: Produkte von Zahlen und Matrixprodukte

Seien **A**, **B** und **C** Matrizen und α , β und γ Zahlen.

► $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Aber: **AB** $\neq$ **BA**

► $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oder $\beta = 0$

Aber: **AB** = **0** impliziert nicht, dass **A** = **0** oder **B** = **0**

► $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ und $\alpha \neq 0$ impliziert $\beta = \gamma$

Aber: **AB** = **AC** und **A** $\neq$ **0** implizieren nicht, dass **B** = **C**.

12.7 Die Transponierte

12.7 Die Transponierte

Für eine $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet die $n \times m$ -Matrix $\mathbf{A}'$, deren i -te Spalte die i -te Zeile von $\mathbf{A}$ ist, für $i = 1, \dots, m$, die **Transponierte** von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponierte: Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{B}'$ und $(\mathbf{AB})'$!

Berechne dann $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$!

Regeln für das Transponieren

Gegeben seien Matrizen **A** und **B**, passend für die folgenden Operationen, und gegeben sei ein beliebiger Skalar α . Dann gilt:

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

$$(\alpha \mathbf{A})' = \alpha \mathbf{A}'$$

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$$

Symmetrische Matrizen

Die Matrix **A** ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Eine symmetrische Matrix ist notwendig quadratisch.

Symmetrie: Beispiel

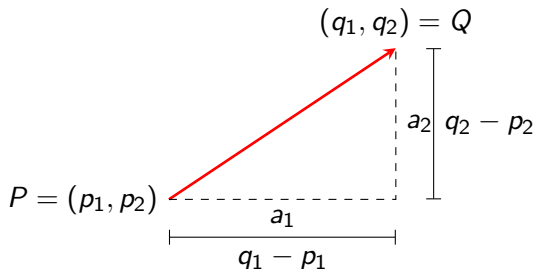
Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Zeige, dass $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

12.9 Geometrische Interpretation von Vektoren

Ein Vektor $\mathbf{a}$ beschreibt die Bewegung von einem Punkt P zu einem Punkt Q .



Für $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ gilt $a_1 = q_1 - p_1$ und $a_2 = q_2 - p_2$.

Der Vektor von P nach Q heißt $\overrightarrow{PQ}$ bzw. geometrischer Vektor.

Länge von Vektoren

Die Länge oder Norm eines Vektors $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ist definiert durch

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

$\|\mathbf{a}\|$ ist die Entfernung des Ursprungs $(0, 0, \dots, 0)$ von $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

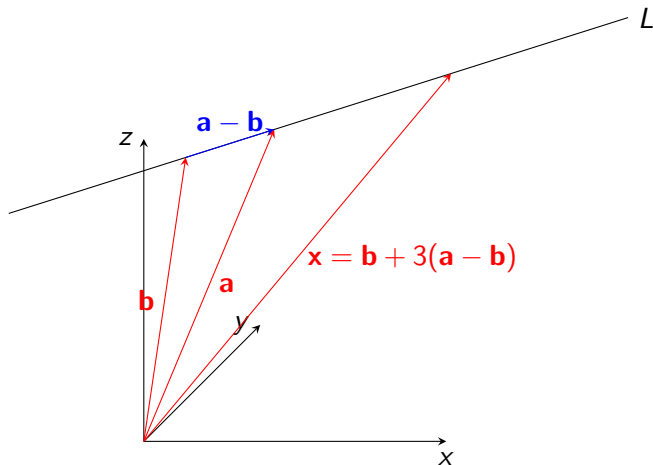
Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Es gilt $\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\|$ für alle Zahlen α und $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

12.10 Geraden und Ebenen

Gerade im $\mathbb{R}^3$



$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \mathbf{b} + t \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}), t \in \mathbb{R}\}$$

Gerade im n -dimensionalen Raum

Die Gerade L in $\mathbb{R}^n$ durch die zwei verschiedenen Punkte $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit

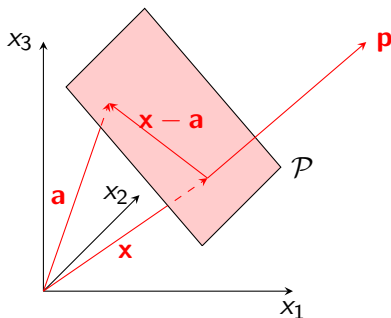
$$\mathbf{x} = t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}$$

für reelle Zahlen t .

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Für zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ ist die Ebene $\mathcal{P}$ definiert durch

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\}$$



Der Vektor $\mathbf{p}$ heißt **Normalenvektor** der Ebene $\mathcal{P}$.

Hyperebene im n -dimensionalen Raum

Die Hyperebene H im $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, die orthogonal zu dem Vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, mit $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, ist, ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mit

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

Eine grafische Darstellung für $n > 3$ ist nicht möglich.

Zusammenfassung

- ▶ Matrixaddition
- ▶ Multiplikation Matrix mit Skalar
- ▶ Skalarprodukt: Multiplikation Vektor mit Vektor
- ▶ Multiplikation Matrix mit Vektor
- ▶ Linearkombination
- ▶ Multiplikation Matrix mit Matrix
- ▶ Transponierte einer Matrix
- ▶ Symmetrie
- ▶ Lineare Gleichungssysteme in Matrixnotation
- ▶ Gauß'sche Elimination
- ▶ Vektoren und Ebenen