Vorlesung zu Kapitel 06:[1]

Differentialrechnung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

6.1 Steigungen von Kurven

6.2 Tangenten und Ableitungen

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

6.4 Ökonomische Anwendungen

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

6.7 Summen, Produkte und Quotienten

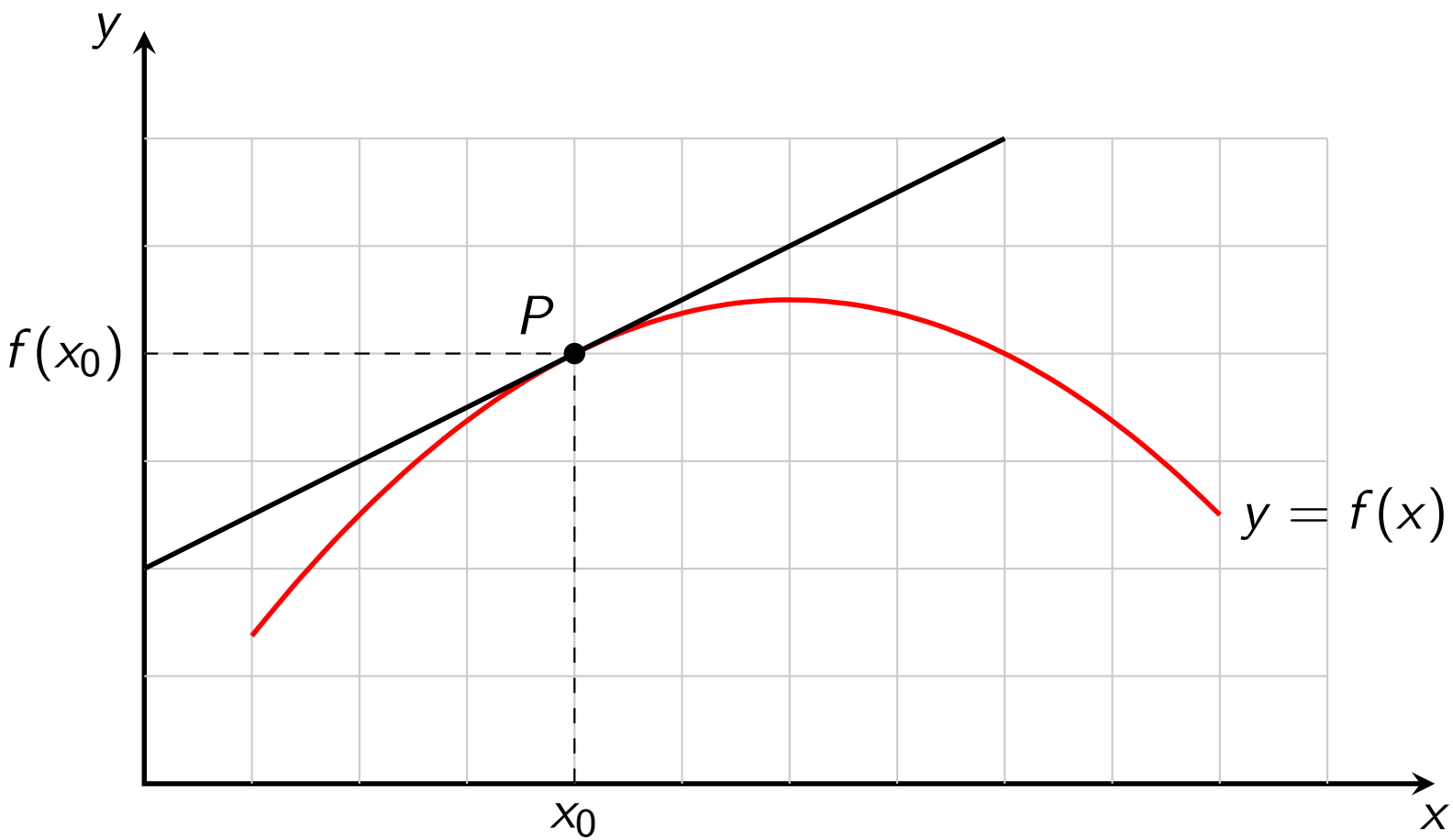
6.8 Kettenregel

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

6.10 Exponentialfunktion

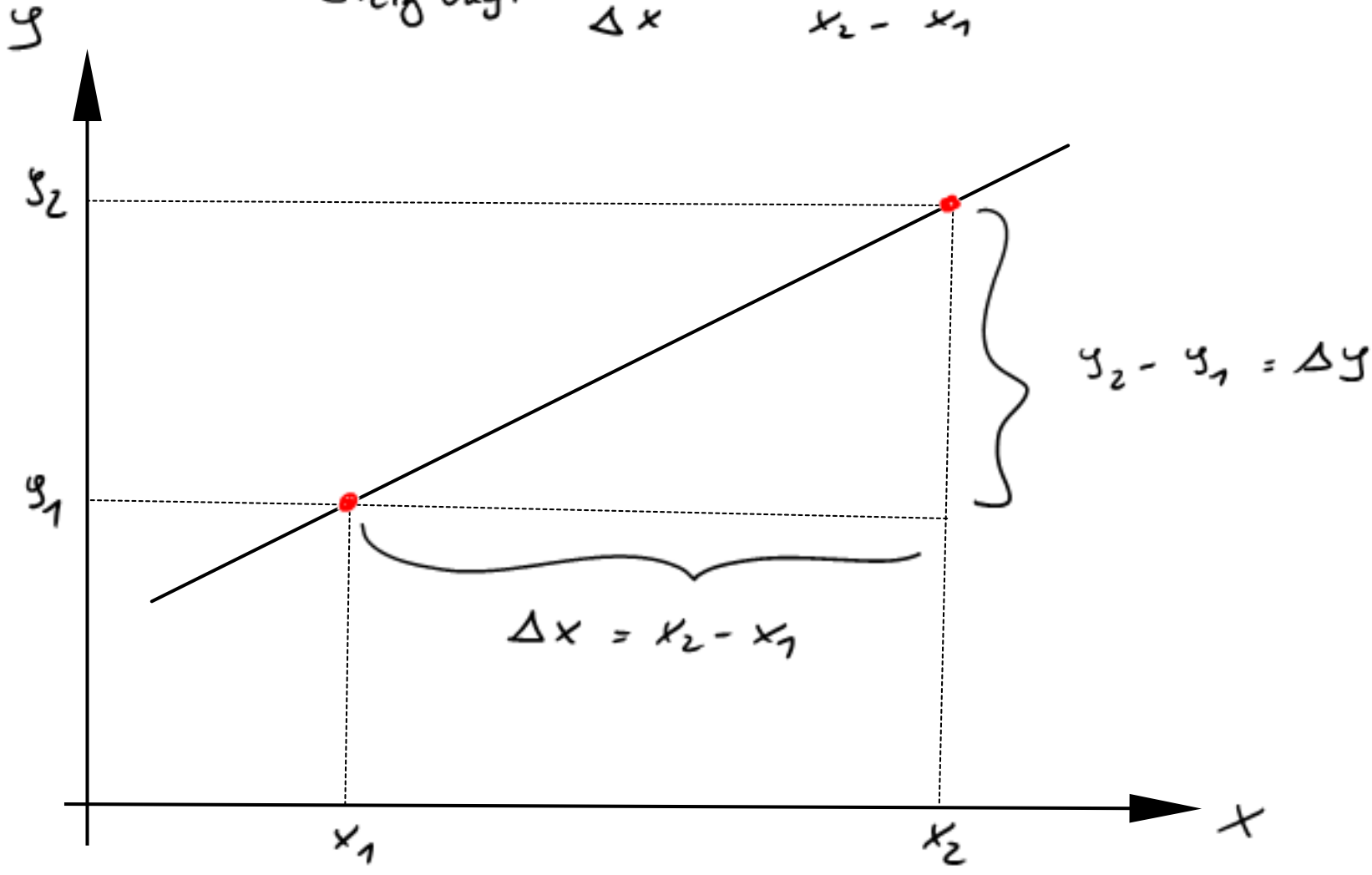
6.11 Logarithmusfunktion

6.1 Steigungen von Kurven

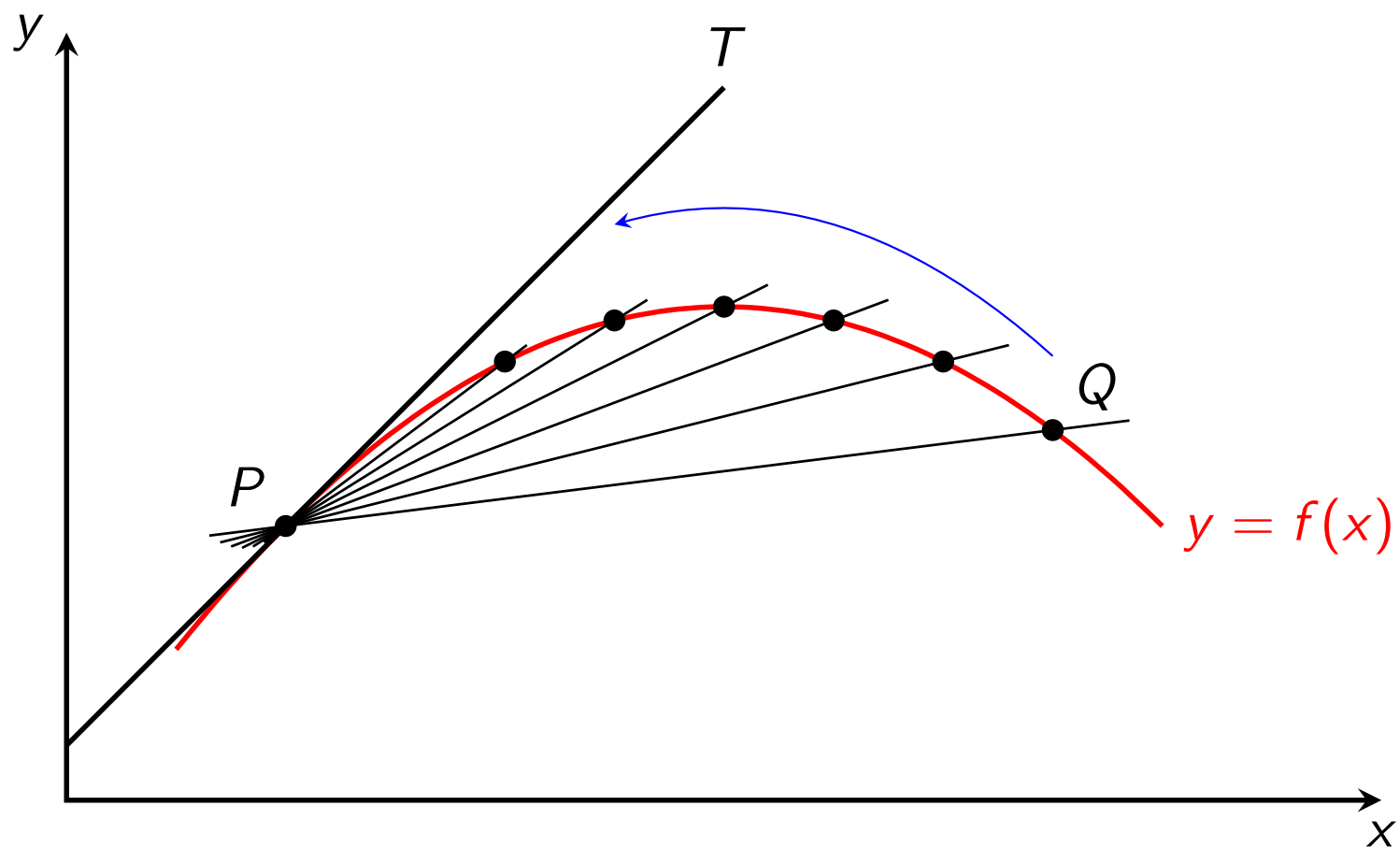


Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0, wir bezeichnen diese Zahl mit $f'(x_0)$.

Steigung: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



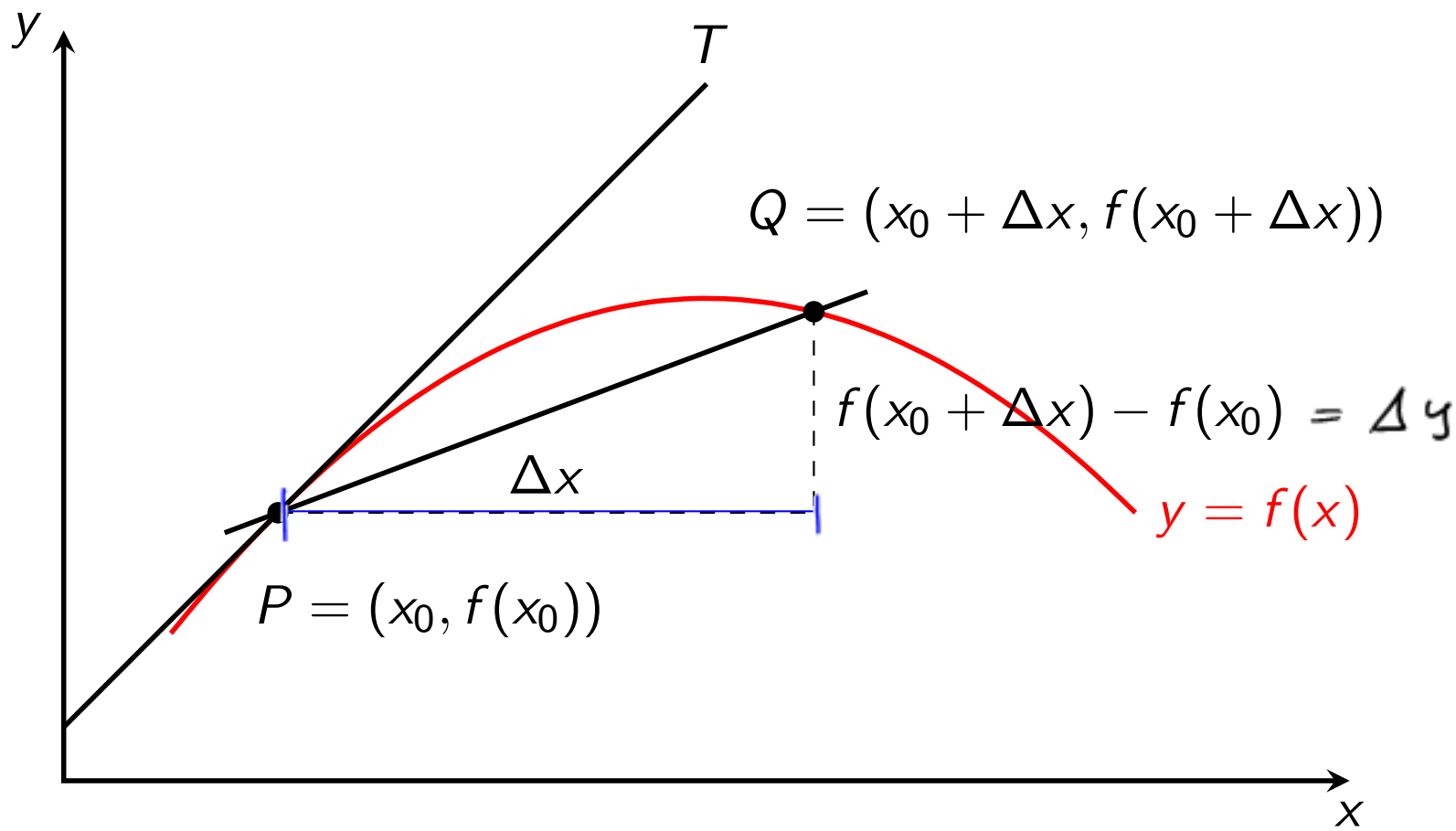
6.2 Tangenten und Ableitungen: Geometrische Idee



Steigung der Tangente T:

Grenzwert der Steigung der Sekante $\overline{PQ}$ wenn sich Q auf dem Graphen zu P bewegt.

Newton-Quotient / Differenzen-Quotient



Steigung von $\overline{PQ}$: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

„Newton Quotient"

Definition: Ableitung

Die **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0, die mit $f'(x_0)$ bezeichnet wird, ist gegeben durch die Formel

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Der Ausdruck $\lim_{\Delta x \to 0}$ bedeutet „**Grenzwert für Δx gegen null**“.

Wir werden diesen Grenzwert später genauer definieren.

Die Funktion f besitzt nur dann eine Ableitung, bzw. ist nur dann **differenzierbar**, falls dieser Grenzwert existiert.

Definition der Tangente

Die Geradengleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

$$y = \underbrace{f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0}_{\text{Achsenabschnitt}} + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}} \cdot x \qquad | - f(x_0)$$

Begründung:

$$\Leftrightarrow \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad | : x - x_0$$

für $x \neq x_0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overbrace{y - f(x_0)}^{\Delta y}}{\underbrace{x - x_0}_{\Delta x}} = f'(x_0)$$

Beispiel: $f(x) = x^2 \to$ Berechnung von $f'(x_0)$

Berechne:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \left(\overset{a}{x_0} + \overset{b}{\Delta x}\right)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \underbrace{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}_{f(x_0+\Delta x)} - \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} = \underbrace{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}_{\Delta y}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 + \Delta x}{1} = 2x_0 + \Delta x$$

Ersetze Δx durch 0.

Ableitung von f:

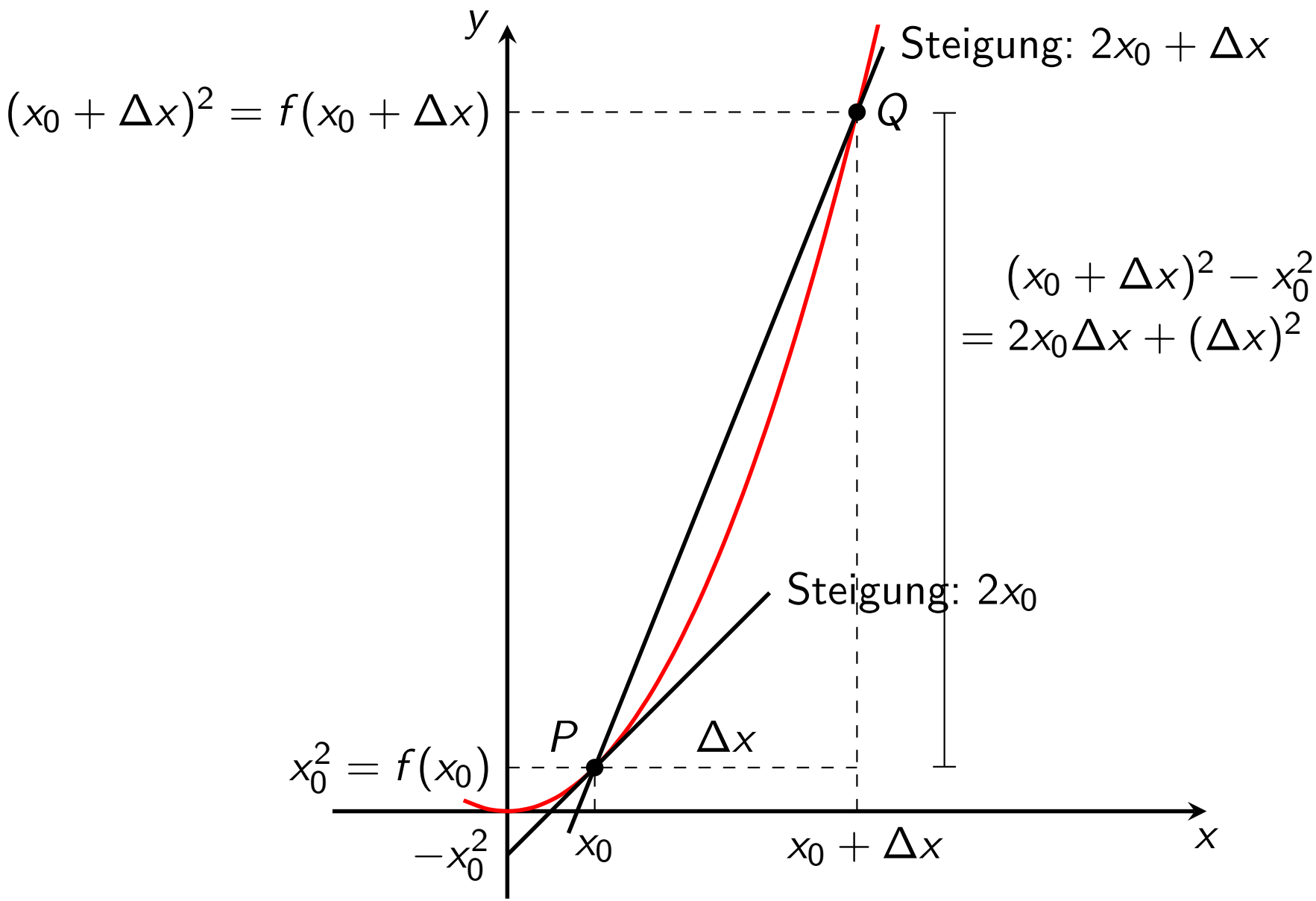
$$f'(x_0) = 2x_0$$

Geradengleichung der Tangente:

$$x_0^2 - 2x_0 \cdot x_0 + 2x_0 \cdot x$$

$$y = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 + f'(x_0)\cdot x = -x_0^2 + 2x_0 \cdot x$$

Beispiel $f(x) = x^2$



Berechnung der Ableitung

(i) Addiere $\Delta x \neq 0$ zu x_0 und berechne $f(x_0 + \Delta x)$.

(ii) Berechne die zugehörige Änderung im Funktionswert: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

(iii) Bilde für $\Delta x \neq 0$ den Differenzen-Quotienten.

(iv) Vereinfache den Bruch aus Schritt (iii) so weit wie möglich.

(v) Dann ist $f'(x_0)$ diejenige Zahl, gegen die der Differenzen-Quotient strebt, wenn Δx gegen 0 geht.

Beispiel: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$

Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

Wie lautet die Geradengleichung der Tangente?

$$f(x_0+\Delta x) = -\frac{(x_0+\Delta x)^2}{2} + 2(x_0+\Delta x) = -\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{2} + 2x_0 + 2\Delta x$$

$$= -\frac{x_0^2}{2} - x_0\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} + 2x_0 + 2\Delta x$$

$$f(x_0) = -\frac{x_0^2}{2} + 2x_0$$

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = -x_0\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} + 2\Delta x = \Delta y$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-x_0\Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} + 2\Delta x}{\Delta x} = -x_0 - \frac{\Delta x}{2} + 2$$

$$\Delta x = 0: \quad -x_0 + 2 = 2 - x_0 = f'(x_0)$$

6.3 Monoton wachsende und fallende Funktionen

Definitionsbereich

Wertebereich

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

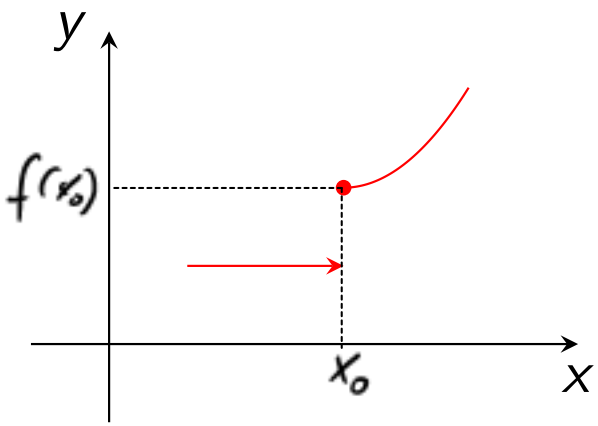
Falls für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, dann ist f **monoton wachsend**
- $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton wachsend**
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, dann ist f **monoton fallend**
- $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f **strikt monoton fallend**

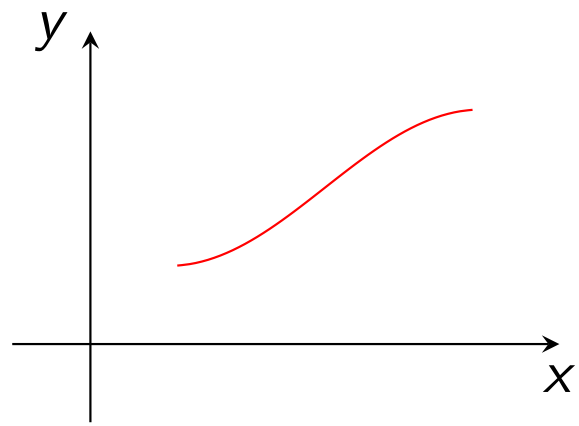
auf dem Intervall $[a, b]$.

Beispiele

monoton wachsend



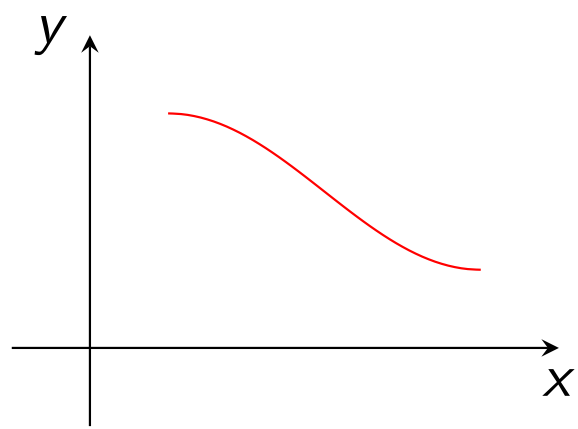
streng monoton wachsend



monoton fallend



streng monoton fallend



$f'(x) = 2 - x$ III $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ist $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ monoton wachsend oder fallend?

Jeweils in welchem Bereich?

$x_1 < x_2$

$$f(x_1) \overset{?}{\leq} f(x_2)$$

$$-\frac{x_1^2}{2} + 2x_1 \leq -\frac{x_2^2}{2} + 2x_2 \quad | + \frac{x_2^2}{2} - 2x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \leq 2x_2 - 2x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \leq 2(x_2 - x_1) \qquad a^2 \quad b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2+x_1)(x_2-x_1) \leq 2(x_2-x_1) \quad | : (x_2 - x_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2+x_1) \leq 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 4$$

Monotonie und Vorzeichen der Ableitung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Ableitung f' und sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Dann gilt:

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ strikt monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ monoton fallend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ strikt monoton fallend
- $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \Leftrightarrow f$ konstant

auf dem Intervall $[a, b]$.

für $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$:

$f(4) = -8 + 8 = 0$ ✓

$f(0) = 0$

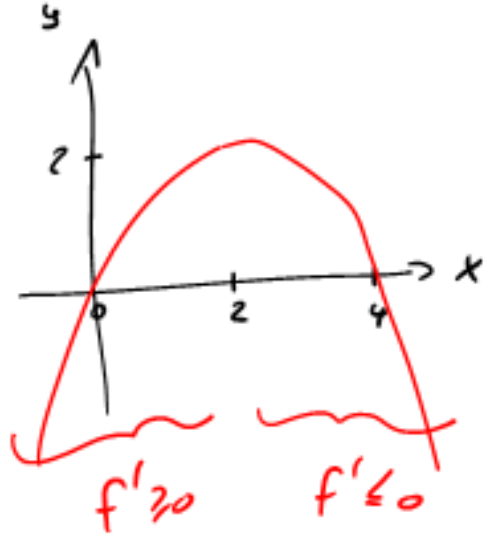
$f'(x) = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$

Auf dem Intervall $(-\infty, 2]$

ist $f(x)$ monoton wachsend.

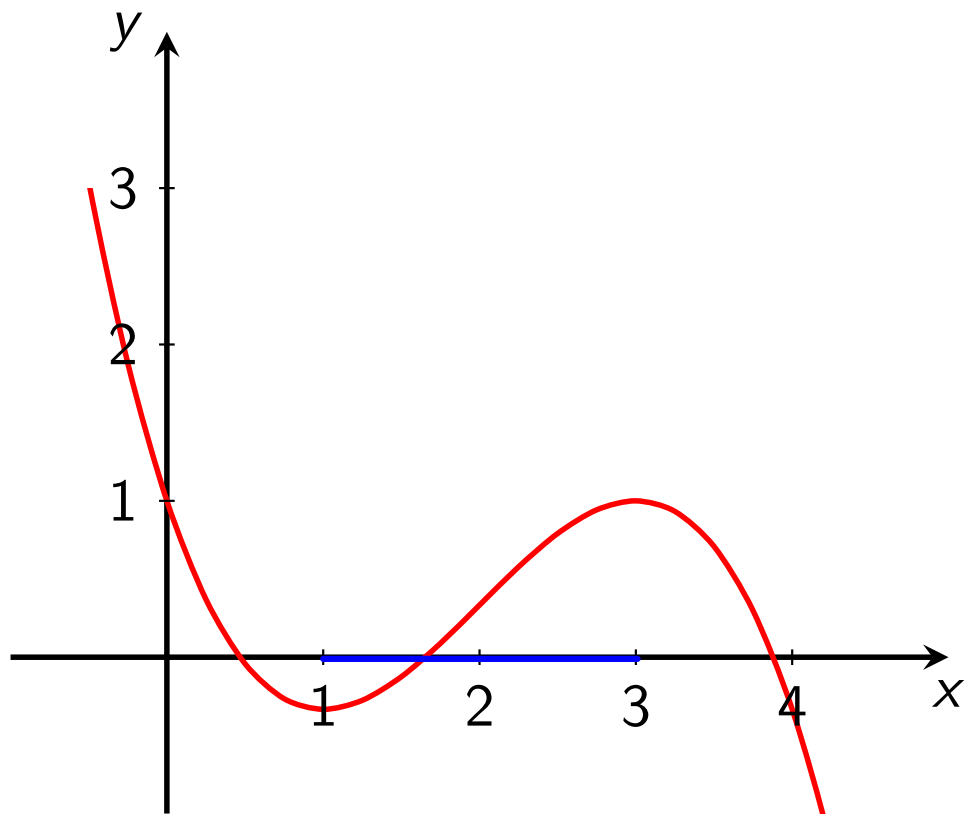
-"- $[2, \infty)$

ist $f(x)$ monoton fallend.



Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$



$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$

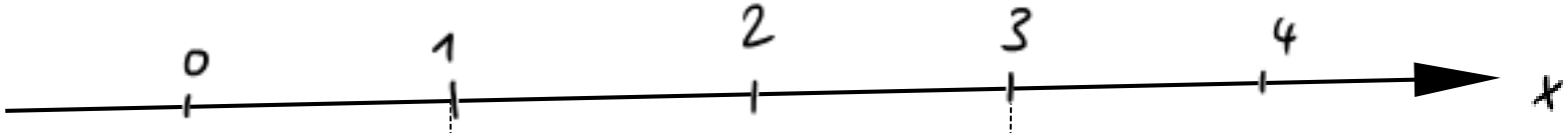
$f'(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3$
$= -4 + 8 - 3 = 1 \geq 0$

Nullstellen von $f'(x)$: $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 \underbrace{-4}_{p}x \underbrace{+3}_{q} = 0$

p-q-Formel : $x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1 \geq 0$

$= \underbrace{-\frac{-4}{2}}_{+2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)^2}_{4} - 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm \sqrt{1}$



$f'(x)$	≤ 0	$+1$	≥ 0	≤ 0

$f'(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 \leq 0$

$f'(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3$

6.4 Ökonomische Anwendungen

Durchschnittliche Änderungsrate von f über dem Intervall von x_0 bis $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Änderungsrate von f in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Relative Änderungsrate von f an der Stelle x_0:

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \frac{1}{f(x_0)}$$

Beispiel 6.4.4: Grenzkosten

Sei die Kostenfunktion C monoton wachsend und differenzierbar.

Grenzkosten an der Stelle x:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls $|\Delta x|$ sehr klein im Vergleich zu x:

$$C'(x) \approx \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Falls x sehr groß und $\Delta x = 1$:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

6.5 Eine kurze Einführung zu Grenzwerten

Sei f eine Funktion.

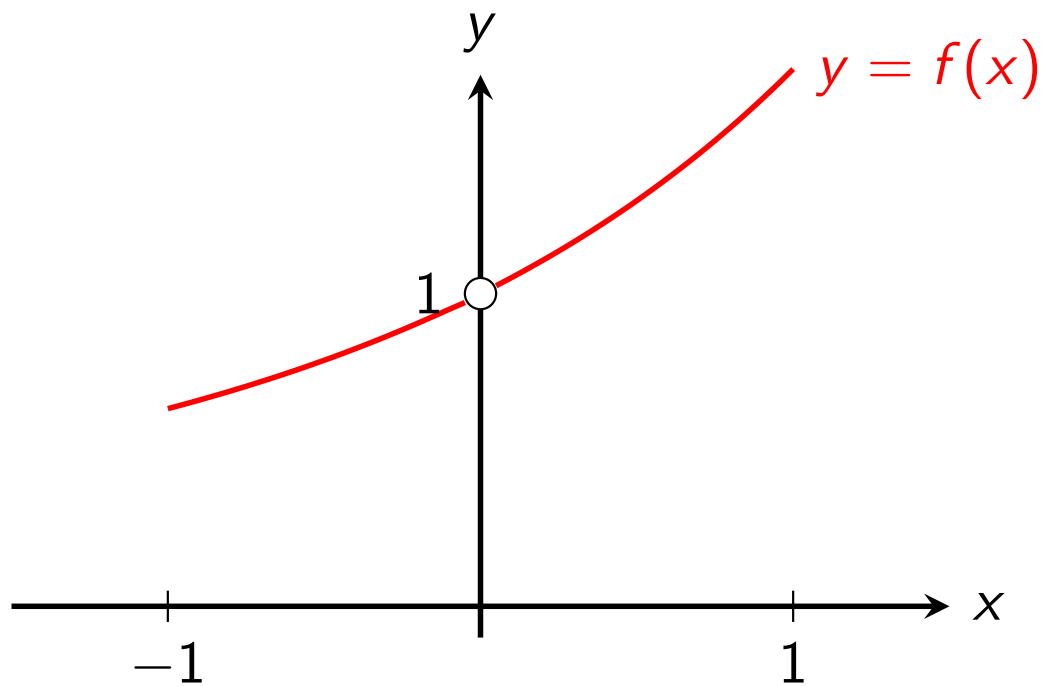
Der Ausdruck

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

heißt **Grenzwert** von f für x gegen x_0.

Er bedeutet, dass wir $f(x)$ so nah an A finden können, wie wir wollen, für alle x nah genug an x_0, aber nicht notwendig gleich x_0.

Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ für $x \neq 0$



x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000
x	1	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1.718	1.052	1.001	1.000

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Regeln für Grenzwerte

Pause bis 11:00 Uhr

Es seien f und g zwei Funktionen.

Wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existieren, dann gilt:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)^r) = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^r$, für $r \in \mathbb{R}$

6.6 Einfache Regeln der Differentiation

Wenn f eine konstante Funktion ist, dann ist ihre Ableitung 0:

$$f(x) = A \text{ für alle } x \Rightarrow f'(x) = 0$$

Additive Konstanten verschwinden beim Ableiten:

$$(A + f(x))' = f'(x)$$

Multiplikative Konstanten bleiben erhalten:

$$(Af(x))' = Af'(x)$$

Für eine beliebige reelle Konstante r gilt:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1}$$

z.B. $(x^3)' = 3x^2$

Ableitung der Wurzel

Wie lautet der Differenzenquotient für $f(x) = \sqrt{x}$? , $x \geq 0$

Benutze die dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ um den Differenzenquotienten zu vereinfachen!

$$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\overbrace{\left(\sqrt{x+\Delta x}}^{a} - \overbrace{\sqrt{x}}^{b}\right) \cdot \left(\overbrace{\sqrt{x+\Delta x}}^{a} + \overbrace{\sqrt{x}}^{b}\right)}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\Delta x}^2 - \sqrt{x}^2}{\Delta x \sqrt{x+\Delta x} + \Delta x \sqrt{x}} = \frac{(\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}) : \Delta x}{(\Delta x \sqrt{x+\Delta x} + \Delta x \sqrt{x}) : \Delta x}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \checkmark$$

6.7 Ableitungen von Summen und Differenzen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Wenn f und g beide in $x \in D$ differenzierbar sind, dann sind die Summe $f + g$ und die Differenz $f - g$ auch in x differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

und

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Beispiel: Gewinn

Es seien $R(x)$ der Erlös und $C(x)$ die Kosten einer Firma bei gegebener Ausbringungsmenge $x \geq 0$.

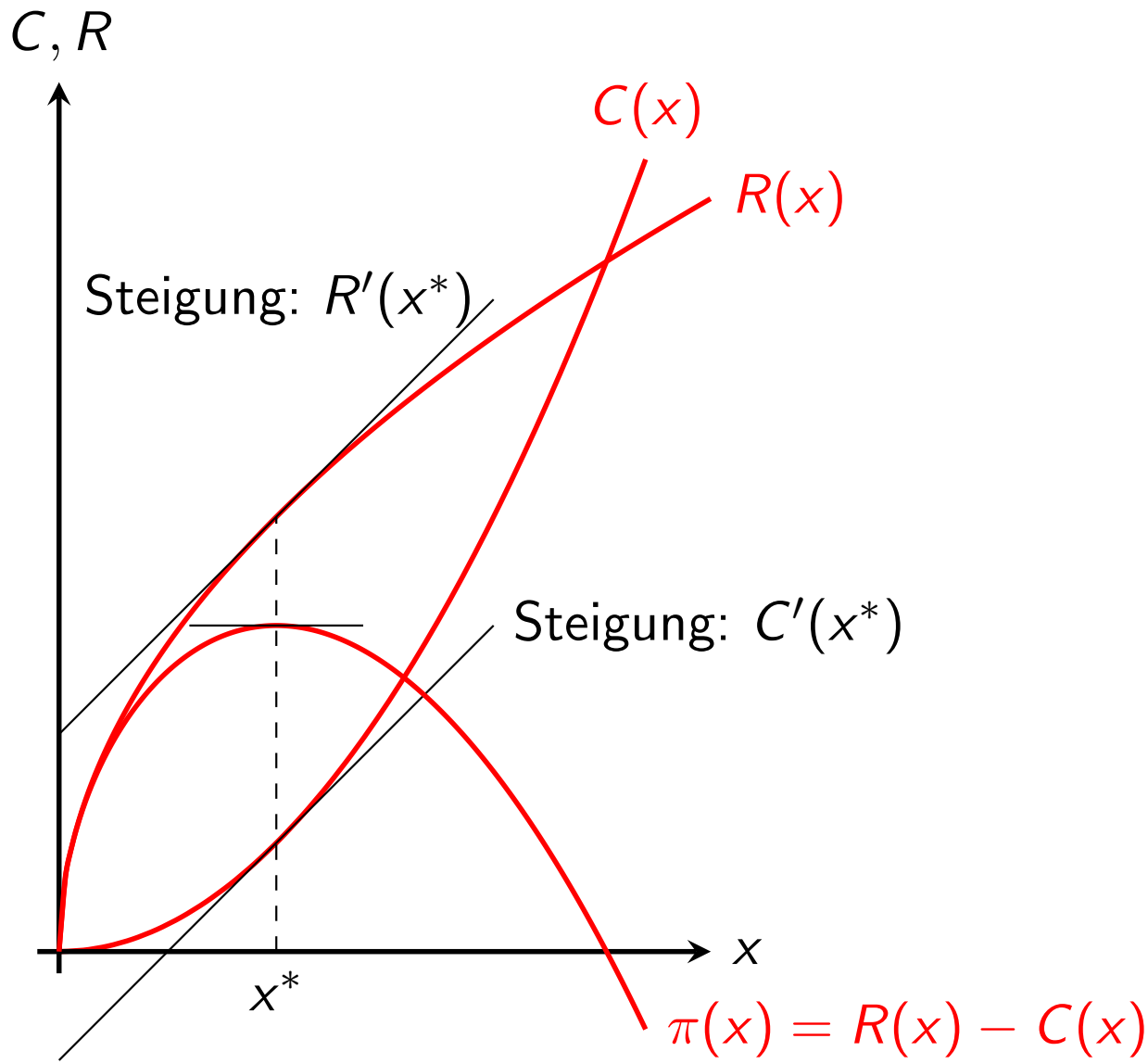
Der Gewinn der Firma sei definiert durch:

$$\pi(x) = R(x) - C(x)$$

Der **Grenzgewinn** der Firma ist dann:

$$\pi'(x) = R'(x) - C'(x)$$

Insbesondere ist der Grenzgewinn gleich null genau dann wenn der Grenzerlös den Grenzkosten entspricht.


C, R
C(x)
R(x)
Steigung: R′(x*)
Steigung: C′(x*)
x
x*
π(x) = R(x) − C(x)

6.7 Produktregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) - f(x+\Delta x)\cdot g(x) + f(x+\Delta x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x) + f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)\left(g(x+\Delta x) - g(x)\right) + \left(f(x+\Delta x) - f(x)\right) g(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x+\Delta x)\,\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)$$

$$\xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

6.7 Quotientenregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Wenn $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar in x und es gilt:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot g(x)^{-1}$$

6.8 Kettenregel

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen.

Dann ist auch die Verkettung $f \circ g$ differenzierbar und es gilt:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Beispiel: optimale Konsumentscheidung

Die Konsumentscheidung $x \geq 0$ für ein Gut hänge vom verfügbaren Einkommen $m \geq 0$ ab

$$\rightarrow \text{ Funktion } x(m)$$

Das verfügbare Einkommen $m \geq 0$ hänge vom Lohnsatz $\omega \geq 0$ ab

$$\rightarrow \text{ Funktion } m(\omega)$$

Dies ergibt die verkettete Funktion $x(m(\omega))$.

Mit der Kettenregel können wir berechnen, wie sich der Konsum x ändert, falls sich der Lohnsatz ω ändert:

$$(x(m(\omega)))' = x'(m) \cdot m'(\omega)$$

6.9 Ableitungen höherer Ordnung

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}$$

Die Ableitung f' wird auch **erste Ableitung** genannt.

Wird die Ableitungsfunktion f' erneut abgeleitet, heißt das Resultat **zweite Ableitung**: $f'' = (f')'$.

$f''(x)$ ist dann die zweite Ableitung an der Stelle x.

Alternative Notation:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$$

Dritte und höhere Ableitungen

Dritte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y''' = f'''(x)$$

Vierte Ableitung

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

***n*-te Ableitung**

$$y = f(x) \Rightarrow y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

6.10 Exponentialfunktion

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \approx 2.71828^x \ , x \in \mathbb{R}$$

Differenzen-Quotient:

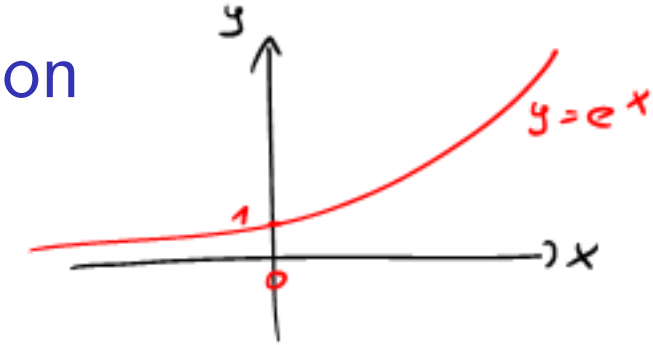
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Wir hatten zuvor argumentiert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$

Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Überblick: Natürliche Exponentialfunktion



Die natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = exp(x) = e^x \qquad (e = 2.71828\ldots)$$

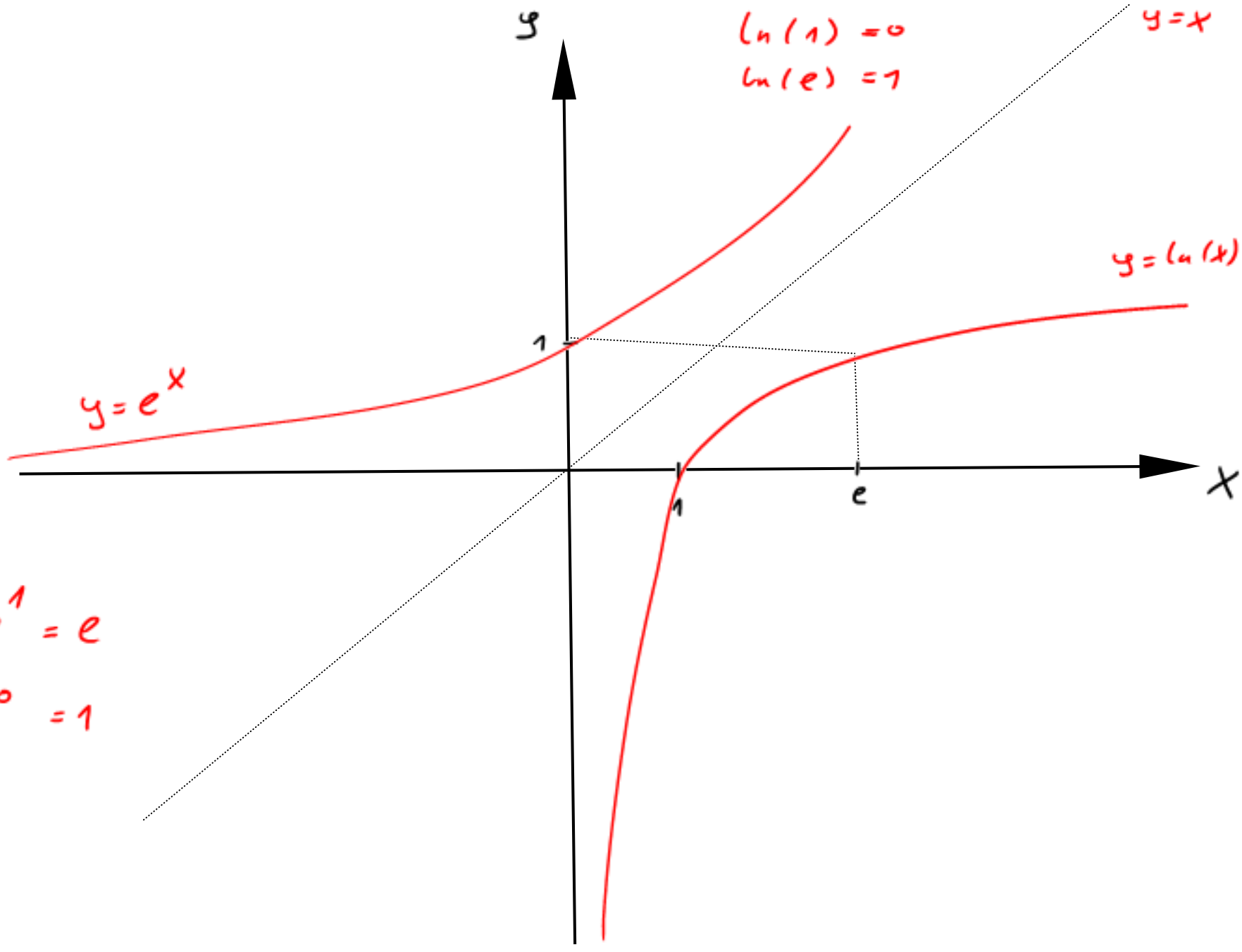
ist differenzierbar und strikt monoton wachsend.

Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x > 0$$

und:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$


y
x
ln(1) = 0
ln(e) = 1
y = x
y = ln(x)
y = e^x
1
1
e
e^1 = e
e^0 = 1

6.11 Logarithmusfunktion - Ableitung

Wir leiten beide Seiten der Gleichung

$$e^{\ln(y)} = y$$

nach y ab.

Ableiung linke Seite: Kettenregel

- innere Funktion: $g(y) = \ln(y) \Rightarrow g'(y) = \ln'(y)$.
- äußere Funktion: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Anwendung der Kettenregel auf der linken Seite ergibt:

$$\left(e^{\ln(y)}\right)' = e^{\ln(y)} \cdot \ln'(y)$$

Die Ableitung der rechten Seite der Gleichung lautet $(y)' = 1$.

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\ln(y)}}_{=y} \cdot \ln'(y) = 1 \Leftrightarrow \ln'(y) = \frac{1}{y}$$

Zusammenfassung

- Differenzen-Quotient
- Monotonie
- Grenzwerte
- Ableitungsregeln
- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

$$f(x) = x^r \qquad f'(x) = r\,x^{r-1}$$

Beweis:

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = e^{\ln(x^r)} = e^{r\cdot\ln(x)}$$

$$f'(x) = \left(e^{r\cdot\ln(x)}\right)' = e' \cdot (r\cdot\ln(x))'$$

$$= \underbrace{e^{r\cdot\ln(x)}}_{x^r} \cdot r\cdot\frac{1}{x} = x^r\cdot r\cdot\frac{1}{x}$$

$$= x^r\cdot r\cdot x^{-1} = r\cdot x^r\cdot x^{-1}$$

$$= r\,x^{r-1}$$