Vorlesung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Lokale Extremstellen

Einfache Tests auf lokale Extremstellen

Globale Extremstellen

Extremwertsatz

lokale Extremstellen

Eine **lokale Extremstelle** ist ein Punkt im Definitionsbereich einer Funktion, für welchen die Funktion den größten Wert oder den kleinsten Wert innerhalb einer begrenzten Umgebung um diesen Punkt annimmt.

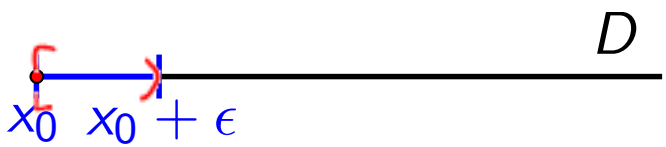
Definition Umgebung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Für ein $\epsilon > 0$ heißt die Menge aller Punkte $x \in D$, deren Abstand zu $x_0 \in D$ kleiner ist als ϵ, **Umgebung** von x_0:

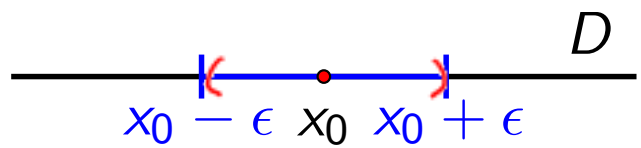
$$\mathcal{U}(x_0, \epsilon) = \{x \in D : |x_0 - x| < \epsilon\}$$

x_0 Randpunkt



$$\mathcal{U}(x_0, \epsilon) = [x_0, x_0 + \epsilon)$$

x_0 innerer Punkt



$$\mathcal{U}(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

Lokale Maximumstelle und lokale Minimumstelle

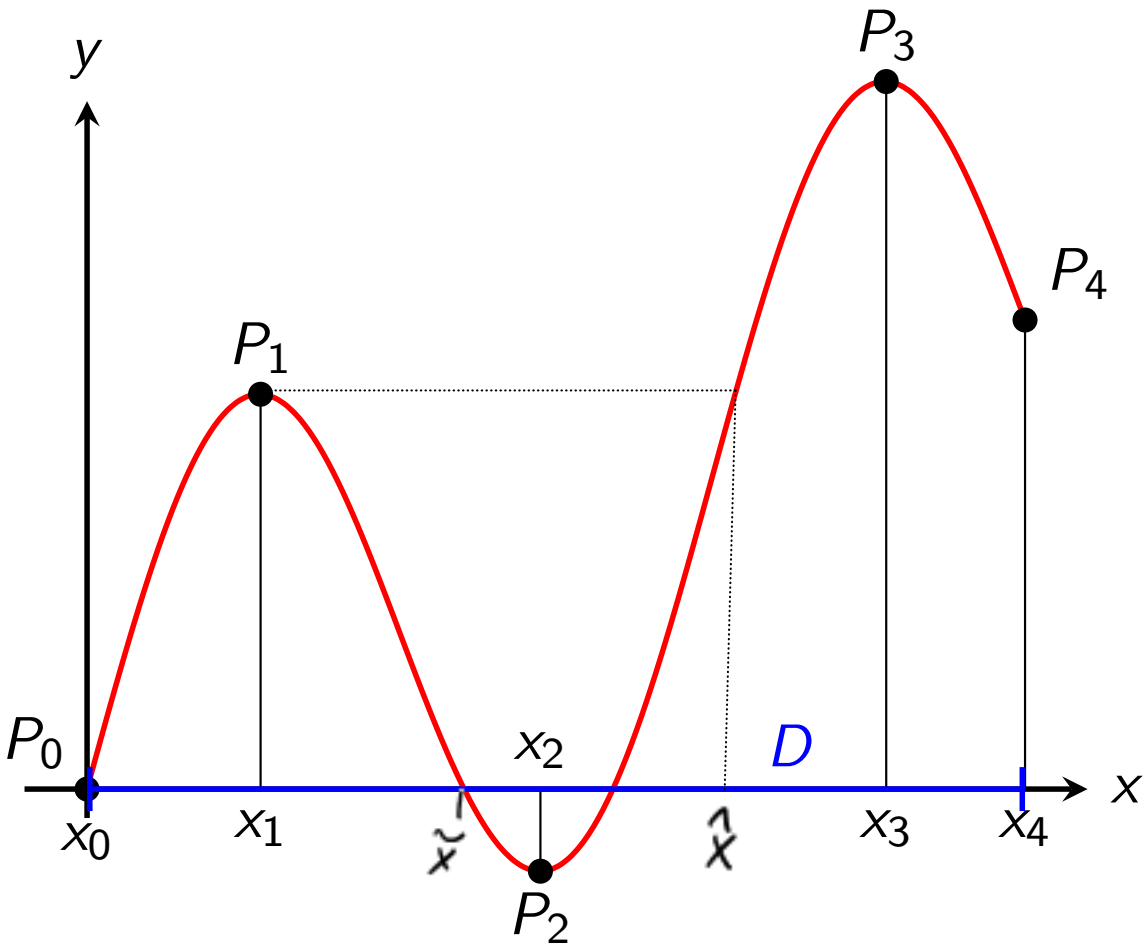
$x_0 \in D$ ist eine lokale Maximumstelle, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$$

$x_0 \in D$ ist eine lokale Minimumstelle, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$$

Lokale Extremstellen



Lokale Extremstellen und Extremwerte

Eine lokale **Extremstelle** ist eine lokale Maximumstelle oder eine lokale Minimumstelle.

Ist die Ungleichung strikt für alle $x \neq x_0$, so ist x_0 eine **strikte** Extremstelle.

Der **Extremwert** ist der Wert der Funktion an der Extremstelle.

Notwendige Bedingung erster Ordnung

$x_0 \in D$ innere E-Stelle $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $x_0 \in D$ eine innere lokale Extremstelle von f.

Dann muss notwendig gelten, dass

$$f'(x_0) = 0$$

Kontraposition:

Falls für eine innere Stelle x_0 gilt: $f'(x_0) \neq 0$, dann kann x_0 keine lokale Extremstelle sein.

Wir nennen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch **stationäre** oder **kritische** Stellen.

Implikation

hinreichende Bedingung — notwendige Bedingung

$$A \Rightarrow B$$

Kontraposition

$$\text{nicht } B \Rightarrow \text{nicht } A$$

Begründung für

Falls $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ x_0 ist keine innere lokale E-Stelle.

Differential:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \quad \overset{\text{für } dx \text{ klein}}{\approx} \quad \Delta y$$

Falls $f'(x_0) > 0$: $dx > 0 \Rightarrow dy \approx \Delta y > 0 \Rightarrow x_0$ kein Max.

$dx < 0 \Rightarrow dy \approx \Delta y < 0 \Rightarrow x_0$ kein Min.

Falls $f'(x_0) < 0$: analog.

Sattelpunkt

Ein innerer stationärer Punkt x_0 von D ist ein **Sattelpunkt**, falls für alle $\epsilon > 0$ zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$ mit $x_1 < x_0 < x_2$ existieren, sodass

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

oder

$$f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$$

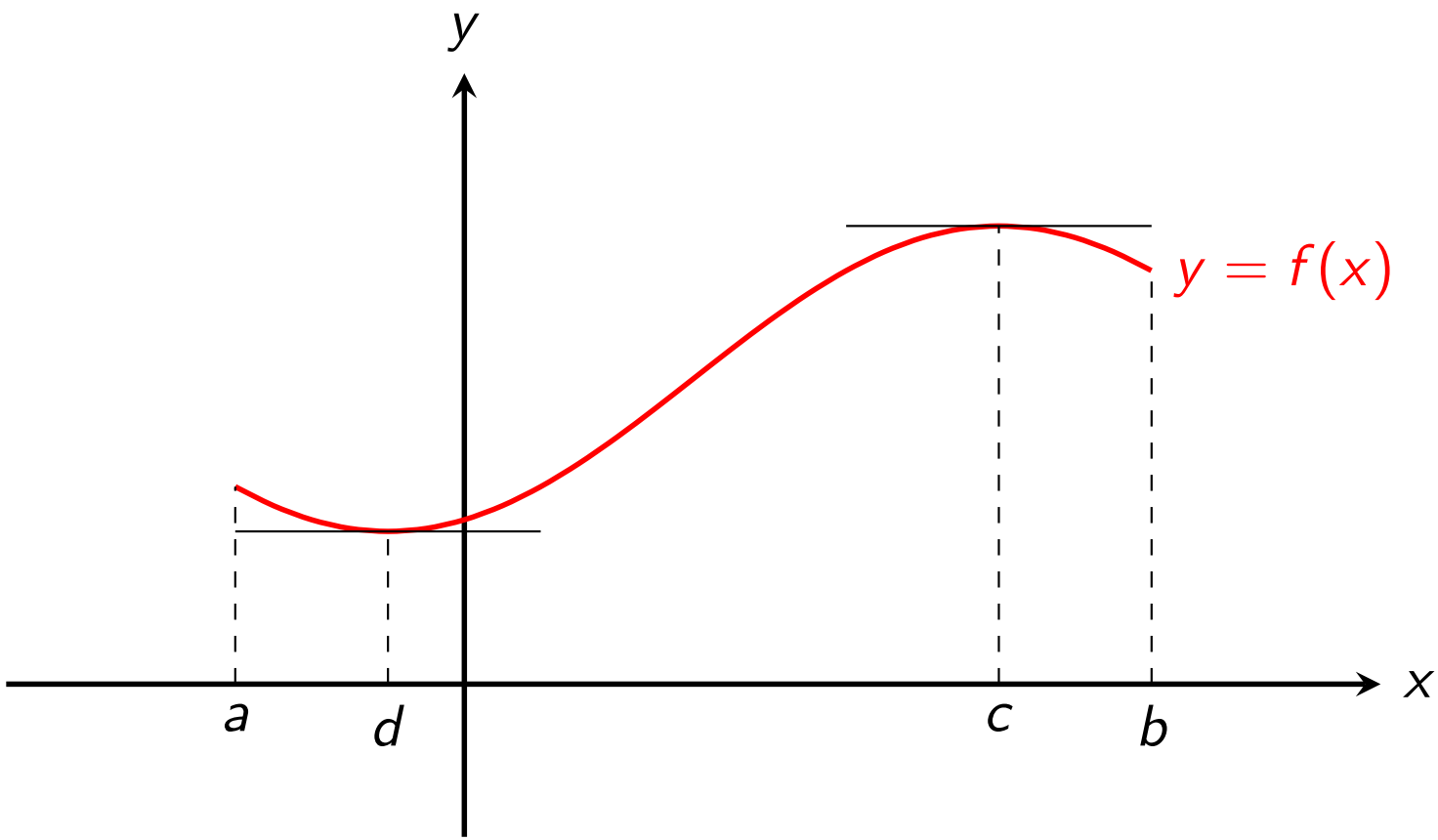
Eigenschaften stationärer Punkte

Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

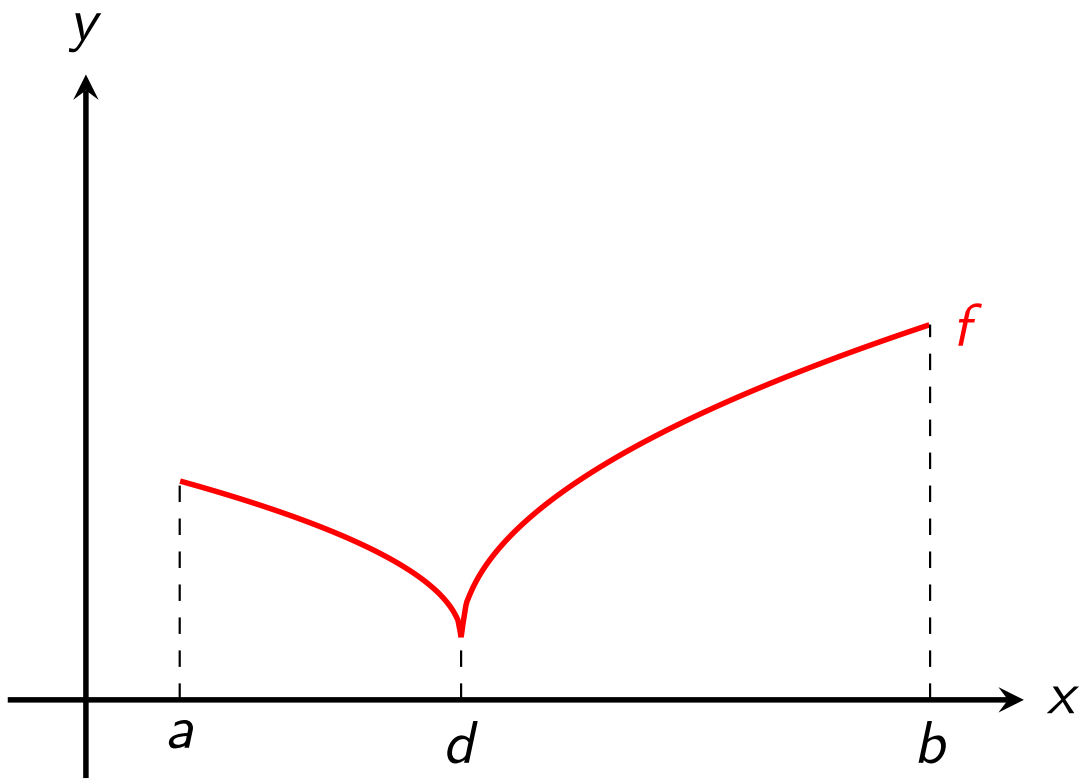
Ein innerer stationärer Punkt x_0 muss in eine der drei Kategorien fallen:

- x_0 ist eine lokale Maximumstelle.
- x_0 ist eine lokale Minimumstelle.
- x_0 ist ein Sattelpunkt.

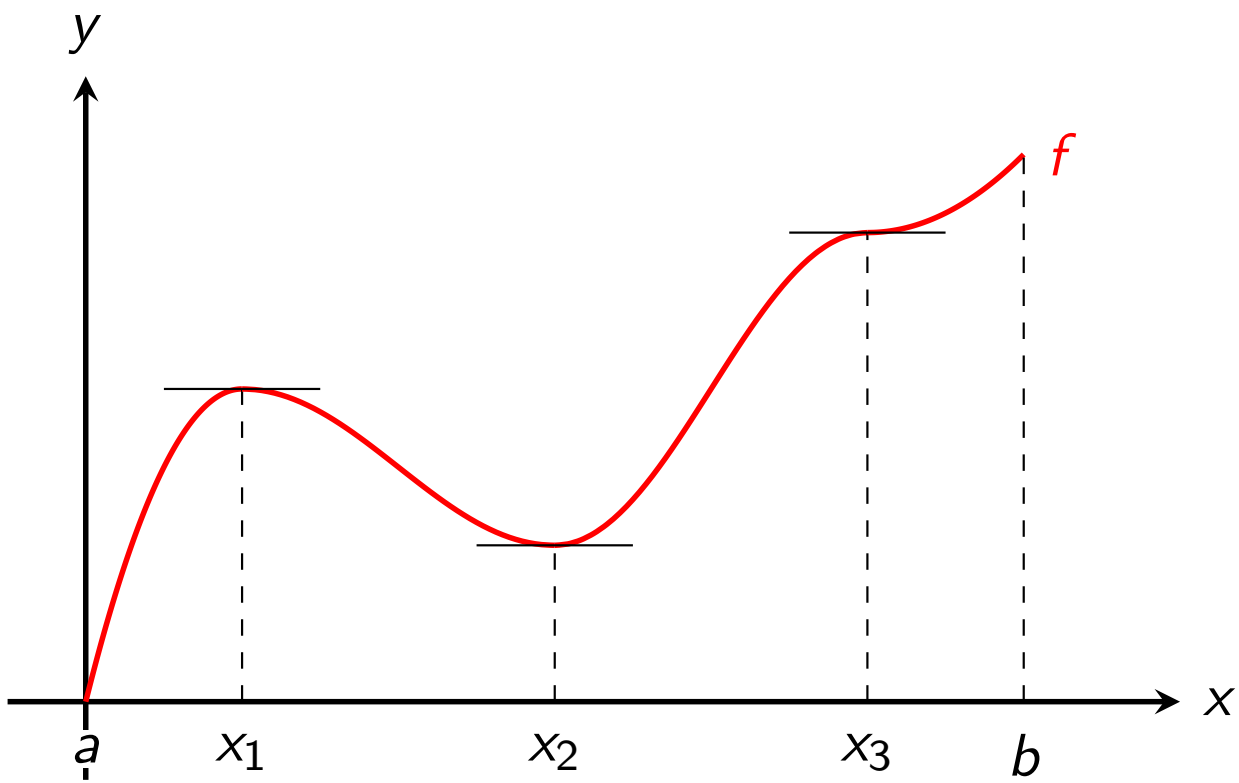
Zwei stationäre Stellen



Keine stationäre Stelle



Innere lokale Extrema und ein Sattelpunkt



Wenn x stationär ist, können wir nicht schlussfolgern, dass x eine Extremstelle von f ist!

Zusammenfassung

Für differenzierbare Funktionen und innere Punkte x_0 gilt:

- x_0 Extrempunkt $\Rightarrow$ x_0 stationär
- x_0 nicht stationär $\Rightarrow$ x_0 kein Extrempunkt
- x_0 stationär $\Rightarrow$ x_0 lokales Min, lokales Max, Sattelpunkt

Wie können wir herausfinden, ob ein innerer stationärer Punkt ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt ist?

- Konkavität / Konvexität
- Test der ersten Ableitung
- Test der zweiten Ableitung

Konkavität / Konvexität

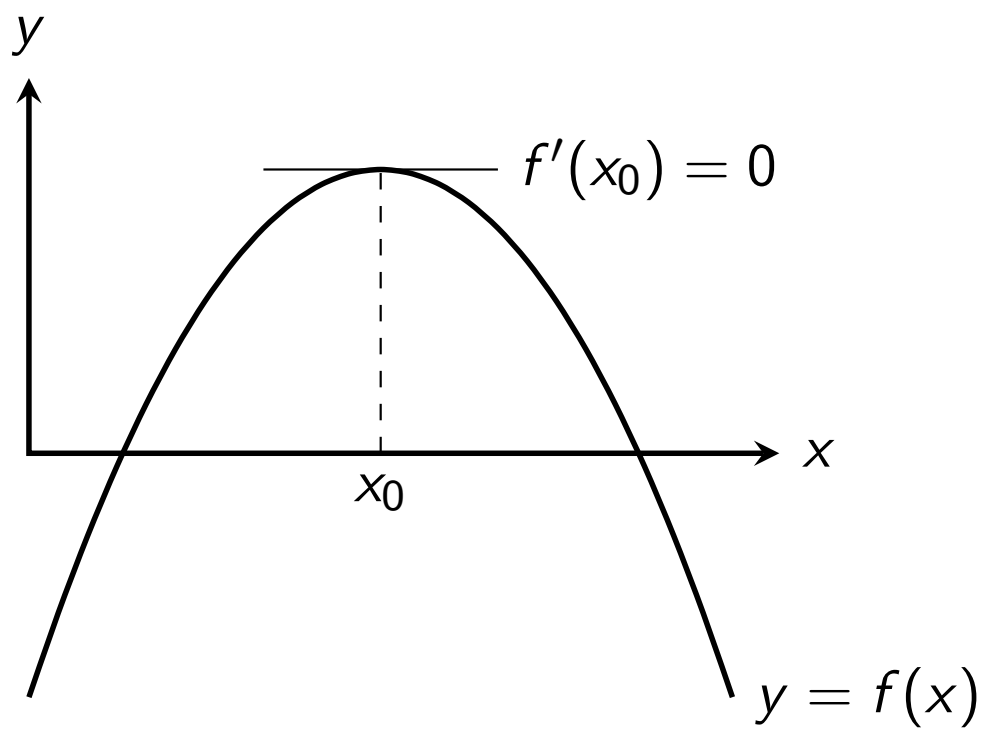
Sei f differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 ein stationärer Punkt von D.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig klein.

- Falls f (strikt) konkav ist auf $\mathcal{U}(x_0, \epsilon)$, dann ist x_0 eine (strikte) lokale Maximumstelle von f
- Falls f (strikt) konvex ist auf $\mathcal{U}(x_0, \epsilon)$, dann ist x_0 eine (strikte) lokale Minimumstelle von f

Konkavität: Begründung



f konkav auf $\mathcal{U}(x_0, \epsilon)$: Graph liegt unter jeder Tangente

$$f(x) \leq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{=y \text{ für Tangente}} \text{ für alle } x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$$

$f'(x_0) = 0$

Mit $f'(x_0) = 0$ folgt $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$.

Test der ersten Ableitung (Vorzeichenwechsel f')

Sei f differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 ein stationärer Punkt von D.

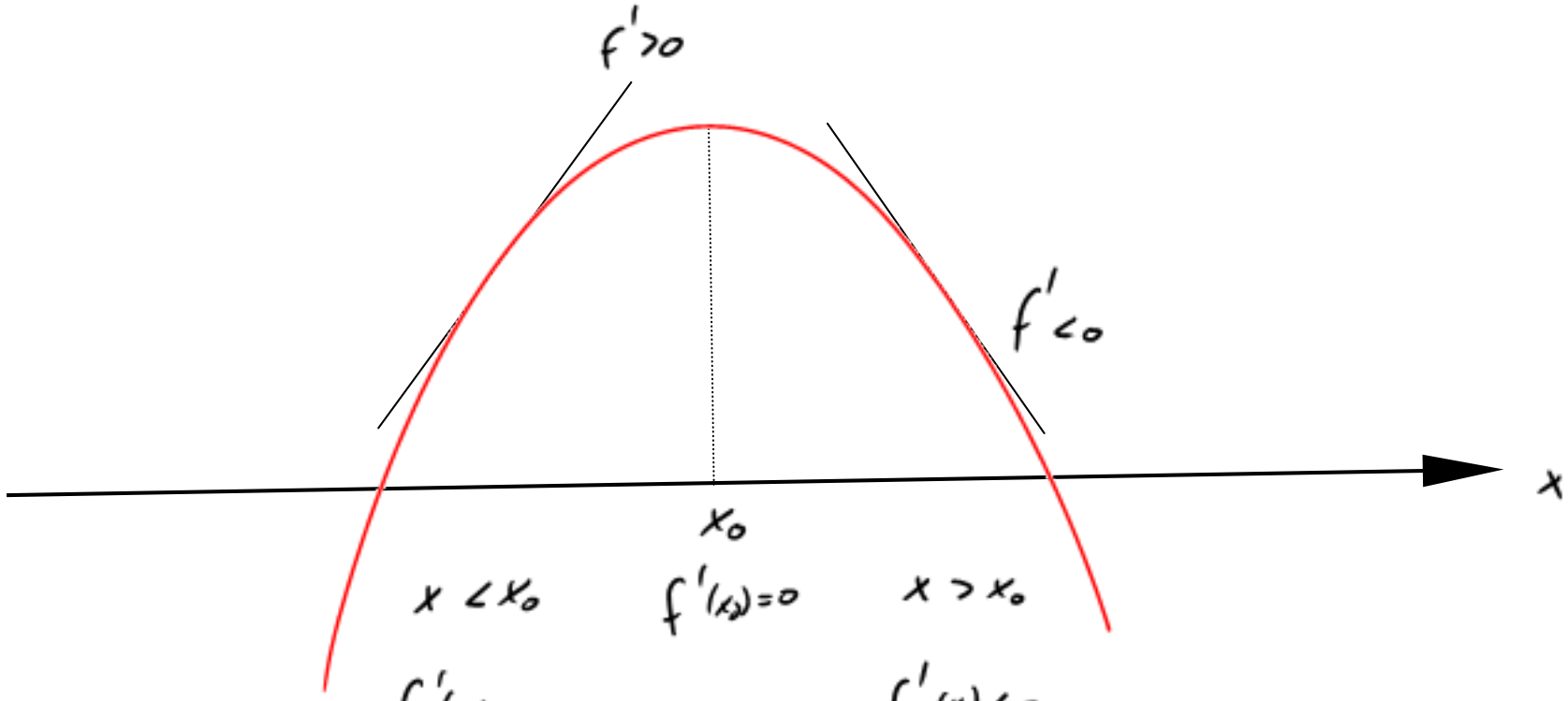
Sei $\epsilon > 0$ beliebig klein.

(i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$,
dann ist x_0 eine lokale Maximumstelle für f.

(ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$,
dann ist x_0 eine lokale Minimumstelle für f.

Falls die Ungleichung bei (i) oder (ii) für alle $x \neq x_0$ strikt ist,
handelt es sich um eine strikte lokale Extremstelle.

(iii) Falls x_0 ein innerer Punkt von D ist und
falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$ (außer für $x = x_0$) oder
falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon)$ (außer für $x = x_0$),
dann ist x_0 eine Sattelstelle für f.



$x < x_0$ $\quad f'(x_0) = 0 \quad$ $x > x_0$

$f'(x) > 0$ $\qquad\qquad$ $f'(x) < 0$

$x - x_0 < 0$ $\qquad\qquad$ $x - x_0 > 0$

$f'(x)(x - x_0) < 0$ $\qquad\qquad$ $f'(x)(x - x_0) < 0$

$$f'(x)(x - x_0) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in U(x_0, \varepsilon)$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$

$D = \mathbb{R}$

(Bedingung 1. Ordnung)

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \overset{!}{=} 0 \quad | \cdot 3$$

$p = -1 \quad q = -2$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \overset{!}{=} 0$$

Lsg: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(x^2 - x - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)}_{f'(x)} = 0$$

$$\left(x^2 - x^1 - 2x^0\right) : (x+1) = x - 2$$

$$\ominus \; \underline{x^2 + x} \quad \downarrow$$

$$0 \quad -2x \quad -2$$

$$\underline{-2x \quad -2}$$

$$0 \quad 0$$

Test der 1. Ableitung

$f'(x)\,(x-x_0) \leq 0 \Rightarrow$ lok. Max

$f'(x)\,(x-x_0) \geq 0 \Rightarrow$ lok. Min.

Nullstellen von $f'(x)$

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)$$

$x_1 = -1$

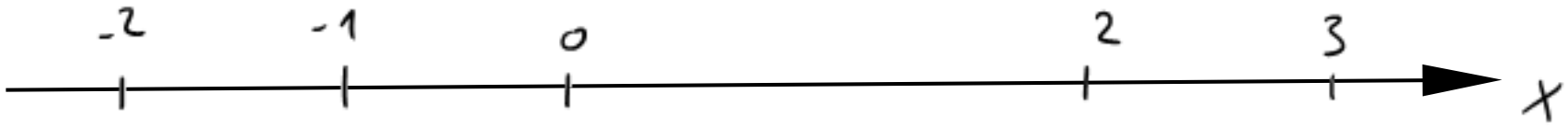
$$f'(x)\cdot(x+1) = \overbrace{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)}^{f'(x)}\underbrace{(x+1)}_{-x_1} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{>0}\underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x-2)}_{<0} \leq 0 \quad \text{für } x \in \mathcal{U}(-1,\varepsilon)$$

$\Rightarrow x_1 = -1$ ist ein lokales Maximum.

$x_2 = 2$

$$f'(x)(x-2) = \overbrace{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)}^{f'(x)}(x-2) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{>0}\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+1)}_{>0} \geq 0 \quad \text{für } x \text{ nahe } 2$$

$\Rightarrow x_2 = 2$ ist ein lokales Minimum.



$f'(-2) > 0$ $\quad f'(-1) = 0$ $\quad f'(0) < 0$ $\quad f'(2) = 0$ $\quad f'(3) > 0$

$f'(x) > 0$ $\qquad f'(x) < 0$ $\qquad f'(x) > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-2)$$

$$f'(-2) = \frac{1}{3}(-2+1)(-2-2) = \frac{1}{3}(-1)(-4) = \frac{4}{3} > 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)(0-2) = -\frac{2}{3} < 0$$

$$f'(3) = \frac{1}{3}(3+1)(3-2) = \frac{4}{3} > 0$$

Test der zweiten Ableitung

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$

$f''(2) = \frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 > 0 \Rightarrow x_2 = 2$ lok. Minimum

Sei f zweimal differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 ein stationärer Punkt von D.

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ strikte lokale Maximumstelle.
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ strikte lokale Minimumstelle.
- Falls $f''(x_0) = 0$ ist keine Aussage möglich.

$f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$f''(-1) = \frac{2}{3}(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 < 0$

$\Rightarrow x_1 = -1$ lok. Maximum.

Hinreichende Bedingung 2. Ordnung

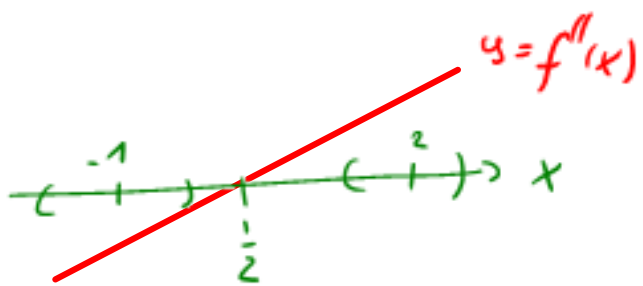
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in D$.

Sei f zweimal differenzierbar auf einer Umgebung $\mathcal{U}(x_0, \epsilon)$ für $\epsilon > 0$ beliebig klein.

Sei x_0 stationär.

- $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon) \Rightarrow x_0$ lokale Maximumstelle.
- $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}(x_0, \epsilon) \Rightarrow x_0$ lokale Minimumstelle.

$f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$



Globale Extremstellen

Globale Extremstellen tragen die Eigenschaften von lokalen Extremstellen nicht nur auf einer Umgebung der Stelle, sondern auf dem gesamten Definitionsbereich.

Wir lassen bei globalen Extremstellen oft den Zusatz „global“ weg.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Eine Stelle x_0 ist eine **Maximumstelle** von f, falls

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Eine Stelle x_0 ist eine **Minimumstelle** von f, falls

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in D$$

Bedingung 1. Ordnung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar.

Falls $x_0 \in D$ eine innere Extremstelle ist,

dann ist x_0 stationär, also $f'(x_0) = 0$.

Konkavität / Konvexität

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $x_0 \in D$ stationär.

(i) Wenn f konkav auf D ist,
dann ist x_0 eine Maximumstelle für f.

(ii) Wenn f strikt konkav auf D ist,
dann ist eine Maximumstelle für f eindeutig.

(iii) Wenn f konvex auf D ist,
dann ist x_0 eine Minimumstelle für f.

(iv) Wenn f strikt konvex auf D ist,
dann ist eine Minimumstelle für f eindeutig.

Test der ersten Ableitung (Vorzeichenwechsel f')

Sei f differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 ein stationärer Punkt von D.

(i) Falls $f'(x)(x - x_0) \leq 0$ für alle $x \in D$,
dann ist x_0 eine Maximumstelle für f.

(ii) Falls $f'(x)(x - x_0) \geq 0$ für alle $x \in D$,
dann ist x_0 eine Minimumstelle für f.

Falls die Ungleichung für alle $x \neq x_0$ strikt ist, handelt es sich um eine strikte Extremstelle.

Test der zweiten Ableitung

Sei f zweimal differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 eine stationäre Stelle.

Falls $f''(x_0) \geq 0$, dann ist x_0 keine lokale und damit auch keine globale Maximumstelle.

Falls $f''(x_0) \leq 0$, dann ist x_0 keine lokale und damit auch keine globale Minimumstelle.

Hinreichende Bedingung 2. Ordnung

Pause bis 11^{00}

Sei f zweimal differenzierbar mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei x_0 eine stationäre Stelle.

- $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in D \Rightarrow x_0$ Maximumstelle.
- Falls $f''(x) < 0$ für alle $x \in D \Rightarrow x_0$ einzige Maximumstelle.
- Falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D \Rightarrow x_0$ eine Minimumstelle.
- Falls $f''(x) > 0$ für alle $x \in D \Rightarrow x_0$ einzige Minimumstelle.

Zwischenwertsatz.

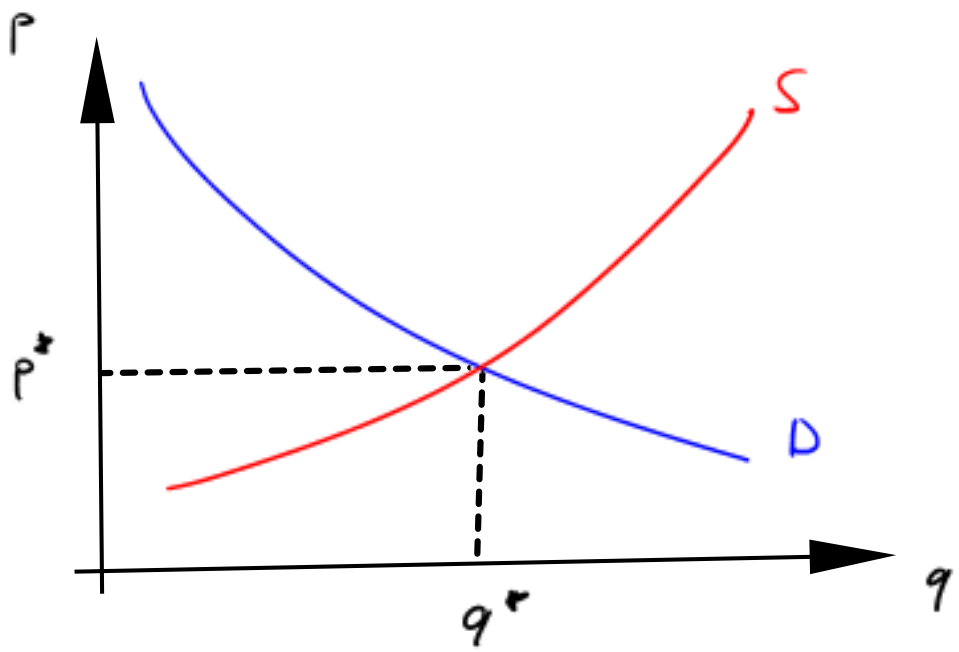
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

o.B.d.A. $f(a) \leq f(b)$

Für jedes c mit $f(a) \leq c \leq f(b)$

existiert ein $x \in [a, b]$ so dass $f(x) = c$.

WiVi Anwendung: Existenz Marktgleichgewicht



Nachfragefunktion $D : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$

Angebotsfunktion $S : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$

D, S stetig

$D(0) > S(0)$ (I)

$\bar{p} > 0$ so dass

$D(\bar{p}) < S(\bar{p})$ (II)

$Z : \mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}$ Überschussnachfrage

$Z(p) = D(p) - S(p)$

$Z(0) > 0$ (I)

$Z(\bar{p}) < 0$

es gibt ein (p^*, q^*) mit $D(p^*) = S(q^*)$

Zwischenwertsatz:

$Z : [0, \bar{p}] \to \mathbb{R}$ Z stetig

$Z(\bar{p}) < 0 < Z(0)$

es existiert $p^* \in [0, \bar{p}]$ mit $Z(p^*) = 0$

Stetigkeit

f ist stetig, falls $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

für alle $x_0 \in D$

Einseitiger Grenzwert

linksseitig

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

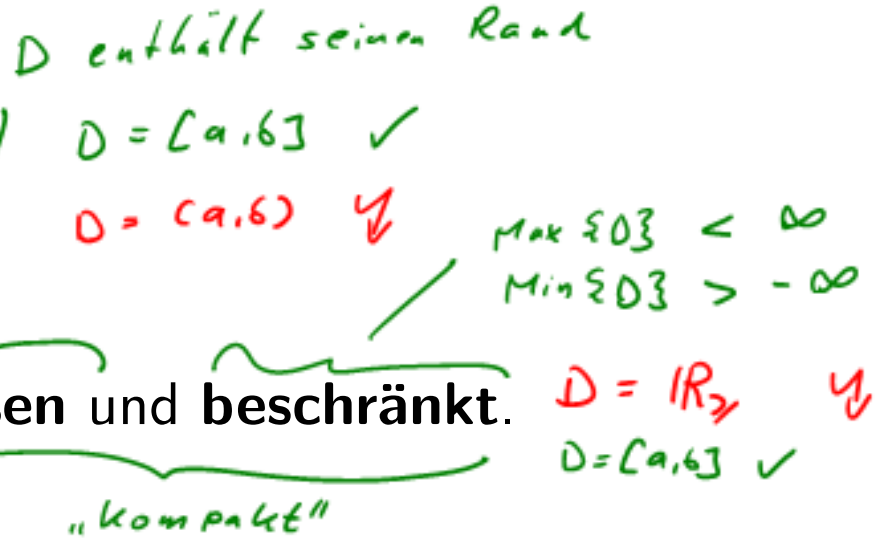
$x < x_0$

rechtsseitig

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$x > x_0$

Extremwertsatz



Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

Sei f **stetig** auf D.

Sei D **nicht leer**, **abgeschlossen** und **beschränkt**.

Dann existiert eine Stelle $x_0 \in D$, an der f ein Minimum hat und eine Stelle $x_1 \in D$, an der f ein Maximum hat, d.h. es gilt:

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \; \forall \; x \in D$$

Sind stetig, abgeschlossen oder beschränkt nicht erfüllt, können Extremstellen existieren, müssen es aber nicht.

Warum gibt es hier kein Maximum?

$0 < x \leq 1$

↓ D nicht abgeschlossen

$$f : (0,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{1}{x} + 10$$

Behauptung

$x_0 > 0$ ist Max-Stelle

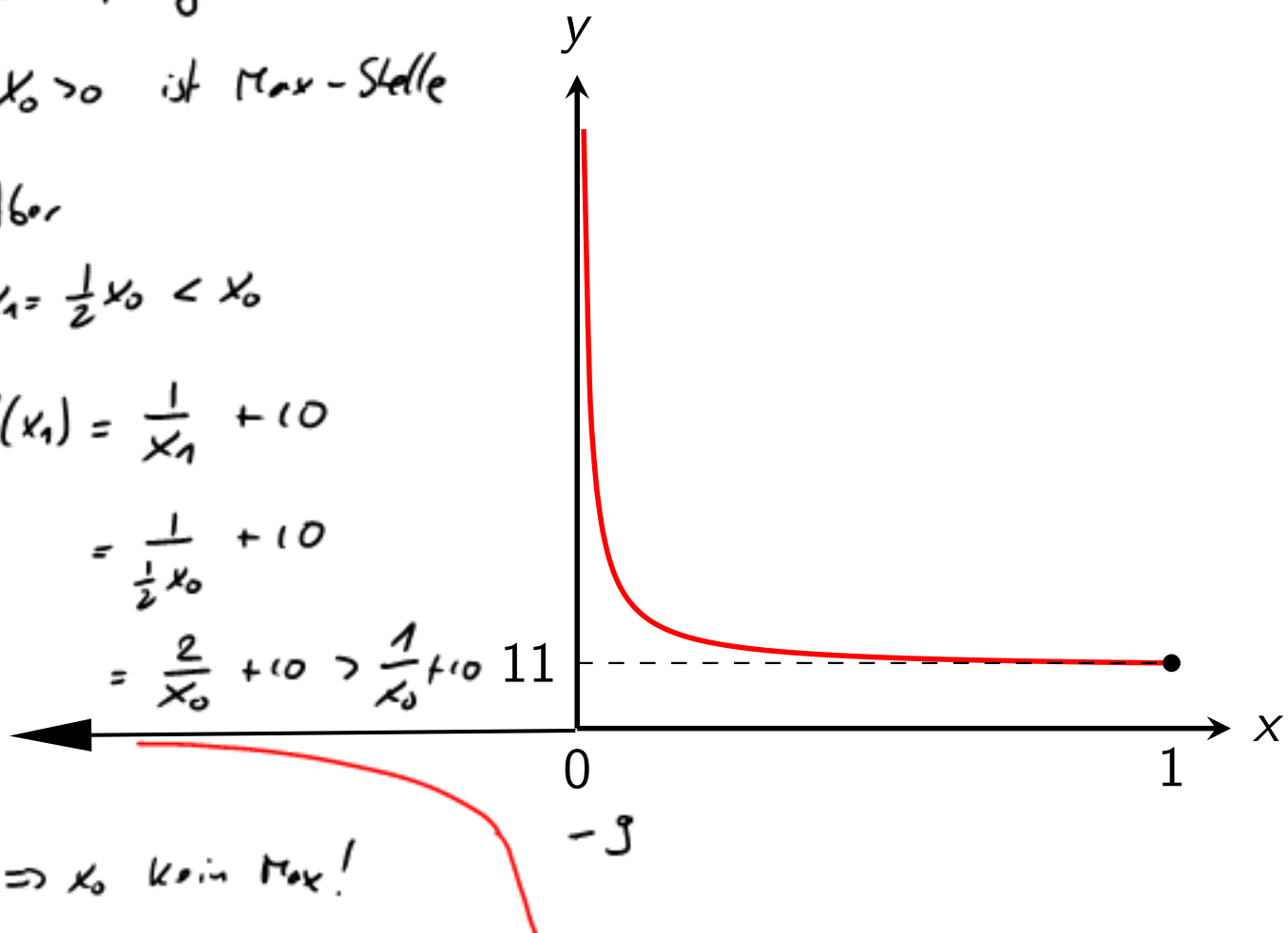
Aber

$x_1 = \frac{1}{2} x_0 < x_0$

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + 10$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} x_0} + 10$$

$$= \frac{2}{x_0} + 10 > \frac{1}{x_0} + 10$$



$\Rightarrow x_0$ kein Max!

f stetig ✓

D nicht leer ✓

~~D abgeschlossen~~

D beschränkt ✓

Warum gibt es hier kein Maximum?

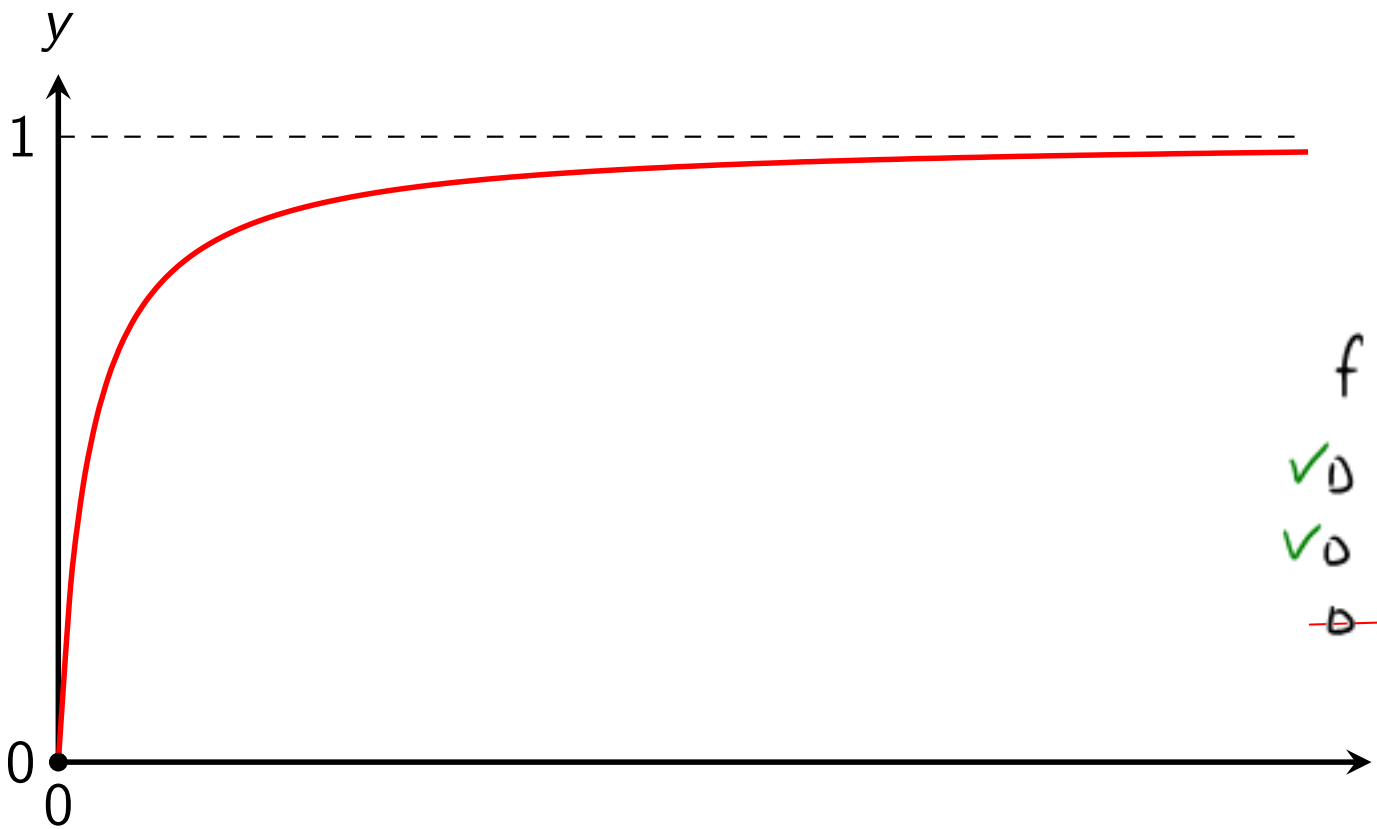
Behauptung $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \geq 0$

nicht beschränkt

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Aber $x_1 = x_0 + 1$

$f(x_1) = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_0+1}{x_0+2}$



f stetig

✓ D nicht leer

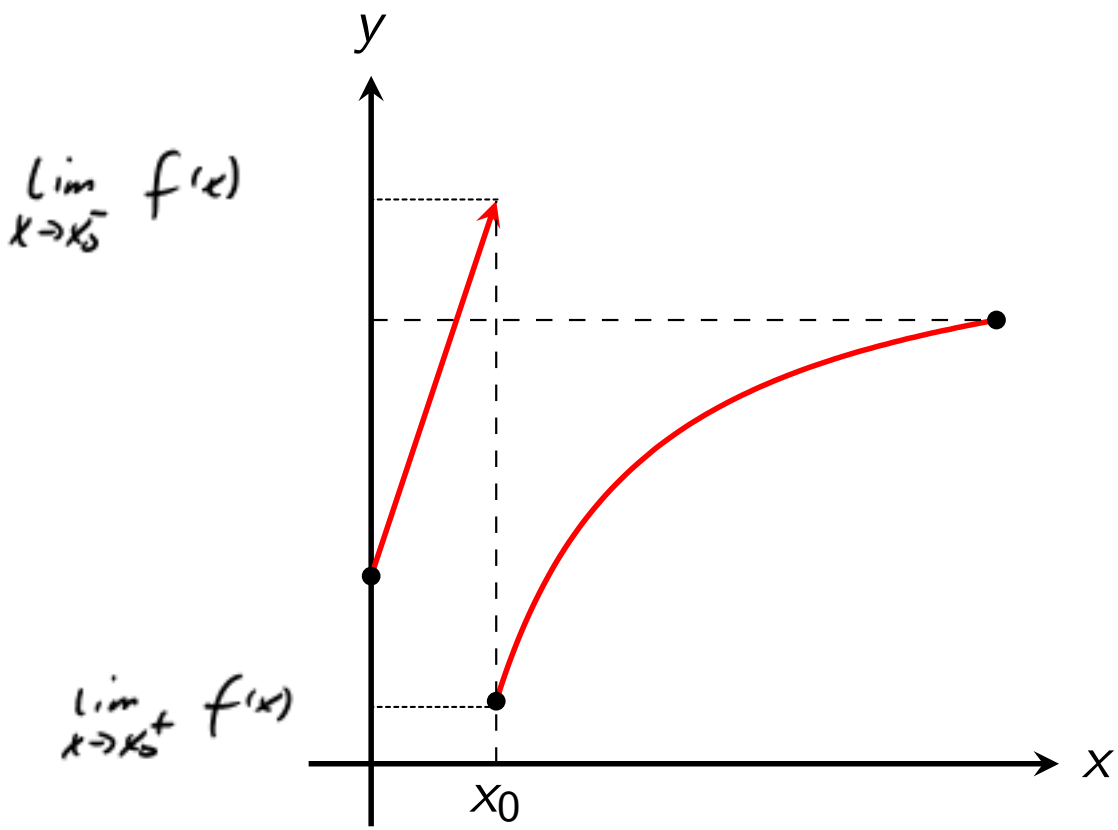
✓ D abgeschlossen

~~D beschränkt~~

z.z. $\frac{x_0+1}{x_0+2} > \frac{x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow (x_0+1)(x_0+1) > x_0(x_0+2) \Leftrightarrow x_0^2+2x_0+1 > x_0^2+2x_0$

$\Leftrightarrow 1 > 0$

Warum gibt es hier kein Maximum?

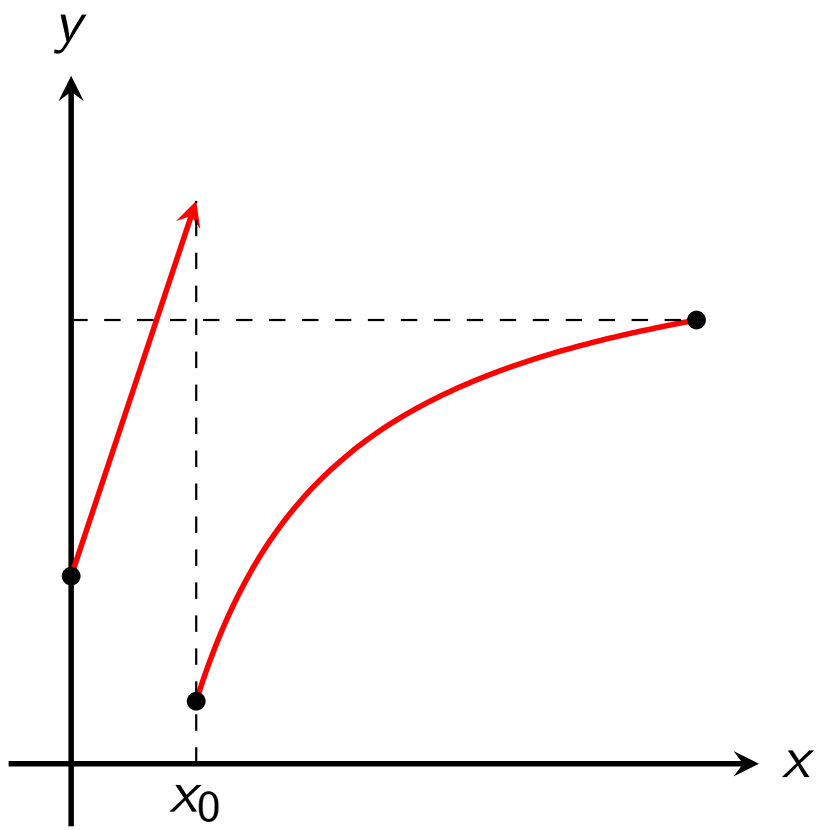


f stetig

- D nicht leer
- D abgeschlossen
- D beschränkt

Warum gibt es hier kein Maximum?

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$



Wie nach Extremstellen gesucht wird

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer, abgeschlossen und beschränkt.

Jede Extremstelle des Intervalls D gehört zu einer der drei verschiedenen Mengen:

(a) Innere Punkte von D, in denen $f'(x) = 0$ ist;

(b) Endpunkte von D, falls sie zu D gehören;

(c) Innere Punkte von D, in denen f' nicht existiert.

Punkte, die zu (a), (b) oder (c) gehören, heißen **Kandidaten für Extremstellen**.

Beispiel $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$

Auffinden der Extrema von differenzierbaren Funktionen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer, abgeschlossen und beschränkt.

Um die Extremwerte von f zu finden, gehe wie folgt vor:

1. Bestimme alle inneren stationären Stellen von f.

2. Berechne den Funktionswert von f in den Randpunkten von D und auch an allen stationären Stellen.

3. Der größte der in 1. und 2. gefundenen Funktionswerte ist der Maximalwert und der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in D.

Beispiel $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Zusammenfassung

- Extremstellen: Maximal- & Minimalstellen
- Notwendige Bedingung erster Ordnung für innere Extremstellen
- Bedingung zweiter Ordnung für Extremstellen
- Extremwertsatz