

Nebenbedingungen in Gleichheit



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Das üben wir in diesem Kapitel:

18.1 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Aufgabe 18.1.1 von Seite 843

Perfekte Komplemente

Perfekte Substitute

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Aufgabe 18.2.2 von Seite 847

Nichtnegativitätsbedingungen

Quasilineare Nutzenfunktion

Aufgabe 18.1.1 von Seite 843

Betrachte das Problem

$$\text{Gewichte} \quad \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 1$$

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} x \cdot y \text{ u.d.B. } x + 3y = 24$$

- a) Verwende die Lagrange-Methode, um die einzig mögliche Lösung zu finden.

Für das Nutzenmaximierungsproblem einer allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenfunktion gilt:

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} A \cdot x^c \cdot y^d \text{ u.d.B. } p_x \cdot x + p_y \cdot y = m$$

Achsenabschnitt
Budgetgrade
für x

$$\Rightarrow x^* = \underbrace{\frac{c}{c+d}}_{\frac{1}{2}} \frac{m}{p_x}, \quad y^* = \underbrace{\frac{d}{c+d}}_{\frac{1}{2}} \frac{m}{p_y}$$

Achsenabschnitt
für y

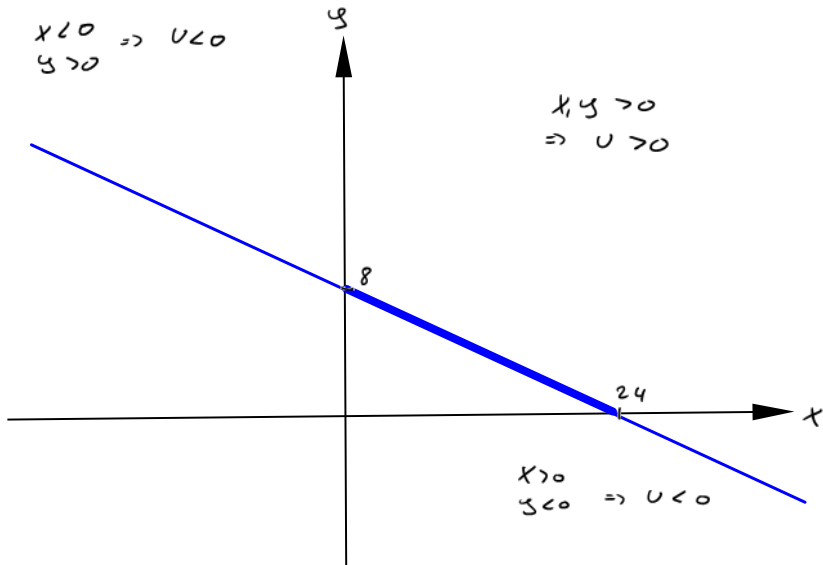
- b) Überprüfe die Lösung von a), in dem Du die Resultate des allgemeinen Cobb-Douglas-Nutzenmaximierungsproblems verwendest.

$$U(x, y) = x \cdot y$$

$$NB \quad x + 3y = 24$$

$$x < 0 \Rightarrow U < 0$$
$$y > 0$$

$$x, y > 0$$
$$\Rightarrow U > 0$$



$$\max_{x,y \in \mathbb{R}_+} x \cdot y \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 24$$

$$\mathcal{L}(x,y) = x \cdot y - \lambda (x + 3y - 24)$$

$$\mathcal{L}'_1 = y - \lambda \leq 0 \quad (*) \quad (=0 \text{ falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2 = x - \lambda \cdot 3 \leq 0 \quad (**) \quad (=0 \text{ falls } y > 0)$$

$$x + 3y = 24 \quad (NB)$$

Fall $x, y > 0$

$$\left. \begin{array}{l} (*) \Rightarrow \lambda = y \\ (**) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}x \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \xRightarrow{NB} x + 3 \cdot \frac{1}{3}x = 24 \Leftrightarrow 2x = 24$$

$$\Rightarrow x = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow u = 48$$

Fall $x=0, y>0$

$$(*) \quad y \leq \lambda = \frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad NB: 0 + 3 \cdot 0 \neq 24 \quad \downarrow$$

Fall $x=0, y=0$

NB $\downarrow$

Fall $x>0, y=0$ $(*) \Rightarrow \overset{y=0}{y} = \lambda \geq \frac{1}{3}x \Rightarrow x=0 \quad \downarrow$

In der Aufgabe

$$U(x, y) = x \cdot y$$

$$\Rightarrow c = d = 1$$

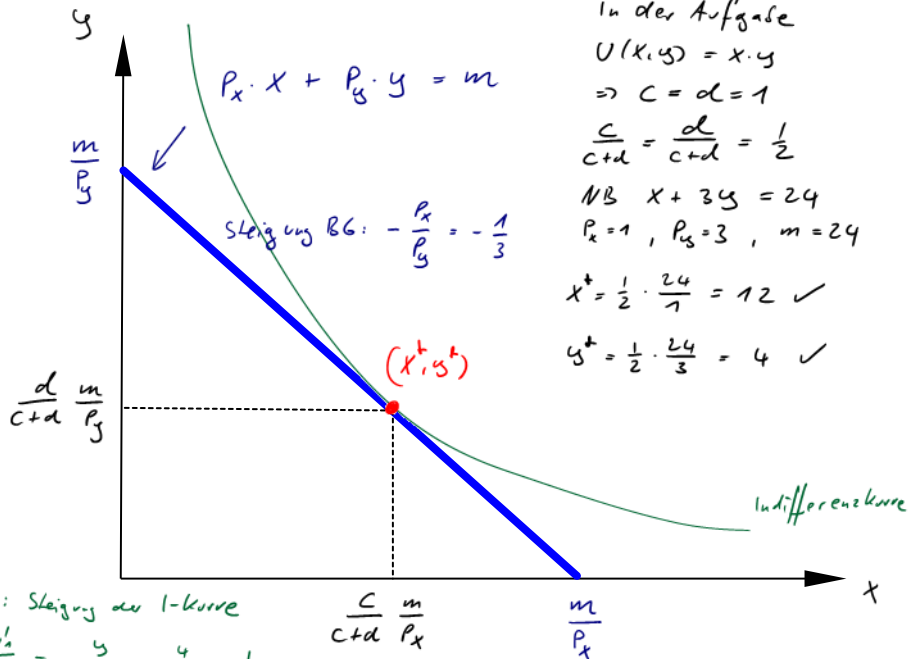
$$\frac{c}{c+d} = \frac{d}{c+d} = \frac{1}{2}$$

$$NB \quad x + 3y = 24$$

$$P_x = 1, P_y = 3, m = 24$$

$$x^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{1} = 12 \quad \checkmark$$

$$y^* = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{3} = 4 \quad \checkmark$$



MRS: Steigung der I-kurve

$$= -\frac{U'_1}{U'_2} = -\frac{y}{x} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe zu Perfekte Komplemente

Die Nutzenfunktion

$$u(x, y) = \min\{ax, by\}, \quad x, y \geq 0$$

repräsentiere Präferenzen für perfekte Komplemente.

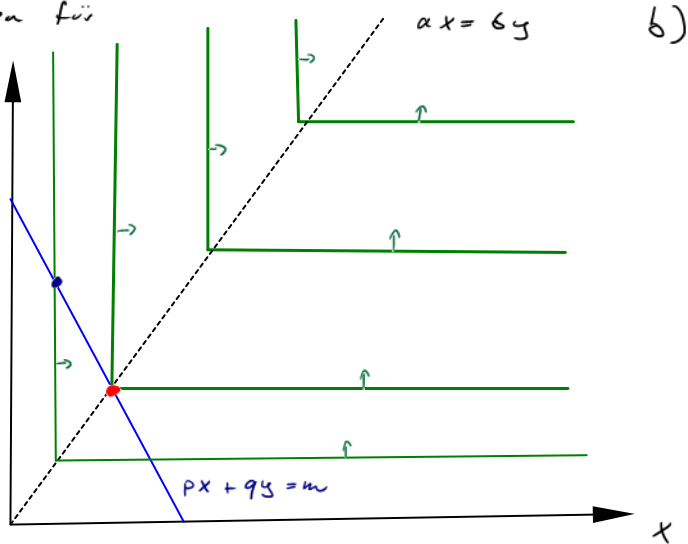
Betrachte:

$$\max_{x, y \geq 0} u(x, y) \text{ u.d.B. } px + qy = m$$

- a) Argumentiere, warum hier die Lagrange Methode nicht so gut geeignet ist. *u ist nicht differenzierbar für $ax = by$*
- b) Beschreibe das Problem grafisch.
- c) Wie lautet die Lösung des Problems?

Indifferenzkurven für
perfekte
Komplemente

$$V(x, y) = \min \{ax, by\}$$



$$\begin{aligned} ax - by &= 0 \\ px + qy &= m \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} a & -b \\ p & q \end{pmatrix} \right| = a \cdot q + b \cdot p > 0$$

c)

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \frac{1}{aq + bp} \begin{pmatrix} q & b \\ -p & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bm / (aq + bp) \\ am / (aq + bp) \end{pmatrix}$$

Aufgabe zu Perfekte Substitute

Die Nutzenfunktion

$$u(x, y) = ax + by \text{ mit } a, b > 0, x, y \geq 0$$

repräsentiere Präferenzen für perfekte Substitute.

Betrachte:

$$\max_{x, y \geq 0} u(x, y) \text{ u.d.B. } px + qy = m$$

- a) Wie lautet die Lagrangefunktion?
- b) Wie lauten die Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum?
- c) Wie lautet die optimale Konsumententscheidung in Abhängigkeit der Parameter a, b, p, q ?

$$a) \quad \mathcal{L}(x, y) = ax + by - \lambda(px + qy - m)$$

$$b) \quad \mathcal{L}'_1 = a - \lambda p \leq 0 \quad (*) \quad (=0 \text{ falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2 = b - \lambda q \leq 0 \quad (**) \quad (=0 \text{ falls } y > 0)$$

$$c) \quad px + qy = m \quad (NB)$$

Fall $x, y > 0$ falls $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$

MRS
↓

Steigung BG
↓

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow a = \lambda p \Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{p} \\ (**) &\Rightarrow b = \lambda q \Leftrightarrow \lambda = \frac{b}{q} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (*) &\Rightarrow a = \lambda p \\ (**) &\Rightarrow b = \lambda q \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$$

$$\text{Lösungsmenge: } \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid px + qy = m\}$$

Fall $x=0, y>0 \rightarrow y = \frac{m}{q}$ falls $\frac{b}{q} \geq \frac{a}{p} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} \geq -\frac{p}{q}$

$$(NB) \Rightarrow y = \frac{m}{q}$$

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow a \leq \lambda p \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{a}{p} \\ (**) &\Rightarrow b = \lambda q \Leftrightarrow \lambda = \frac{b}{q} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (*) &\Rightarrow a \leq \lambda p \\ (**) &\Rightarrow b = \lambda q \end{aligned}} \right\} \frac{b}{q} \geq \frac{a}{p} \Leftrightarrow \frac{p}{q} \geq \frac{a}{b} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} \geq -\frac{p}{q}$$

Fall $x>0, y=0$ falls $\frac{b}{q} \leq \frac{a}{p} \Leftrightarrow -\frac{a}{b} \leq -\frac{p}{q}$

$$a \text{ nach } b \leadsto x = \frac{m}{p}, y=0$$

Fall $x=0, y=0$

(NB) verletzt y

Aufgabe 18.2.2 von Seite 847

Es sei $c(K, L) = r \cdot K + w \cdot L$ eine Kostenfunktion, wobei $r, w > 0$ und $f(K, L) = \sqrt{K} + L$ eine Produktionsfunktion für $K, L \geq 0$.

- a) Interpretiere $-\frac{c'_1(K^*, L^*)}{c'_2(K^*, L^*)}$ und $-\frac{f'_1(K^*, L^*)}{f'_2(K^*, L^*)}$.
- b) Löse das Problem

$$\min_{K, L \in \mathbb{R}} c(K, L) \text{ u.d.B. } f(K, L) = Q,$$

wobei $Q > w/2r$. $\Rightarrow Q - \frac{w}{2r} > 0$

- c) Verifiziere, dass für die Lösung (K^*, L^*) gilt:

$$-\frac{c'_1(K^*, L^*)}{c'_2(K^*, L^*)} = -\frac{f'_1(K^*, L^*)}{f'_2(K^*, L^*)}$$

$$a) \quad C(K, L) = r \cdot K + w \cdot L$$

$$C'_1 = r, \quad C'_2 = w$$

ISO Kostenkurve

$$-\frac{C'_1}{C'_2} = -\frac{r}{w}$$

Interpretation: Steigung einer Höhenlinie
von C

$$f(K, L) = \sqrt{K} + L$$

$$f'_1 = \frac{1}{2\sqrt{K}}, \quad f'_2 = 1$$

ISO Quantile

$$-\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{1}{2\sqrt{K}}$$

Interpretation: Steigung einer Höhenlinie
von f

$$b) \quad \min_{K, L \in \mathbb{R}_+} r \cdot K + w \cdot L \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{K} + L = Q$$

$$L = Q - \sqrt{K}$$

$$\mathcal{L}(K, L) = r \cdot K + w \cdot L - \lambda(\sqrt{K} + L - Q)$$

$$\mathcal{L}'_1 = r - \lambda \frac{1}{2\sqrt{K}} \leq 0 \quad (*) \quad (=0 \text{ falls } K > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2 = w - \lambda \leq 0 \quad (**) \quad (=0 \text{ falls } L > 0)$$

$$\sqrt{K} + L = Q$$

$$C\left(\left(\frac{w}{2r}\right)^2, Q - \frac{w}{2r}\right) = \text{nächste Seite}$$

Fall $K, L > 0$

$$(*) \quad r = \lambda \frac{1}{2\sqrt{K}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = r \cdot 2 \cdot \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad w = 2 \cdot r \cdot \sqrt{K} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w}{2r} = \sqrt{K}$$

$$(**) \quad w = \lambda$$

$$\Rightarrow K^* = \left(\frac{w}{2r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad L^* = Q - \frac{w}{2r}$$

Fall $K=0, L>0$ $\Rightarrow L=Q$

$$(*) \quad \lambda \geq 2 \cdot r \cdot \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad w \geq 2r \cdot \sqrt{K} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{K} \leq \frac{w}{2r} \quad \Rightarrow \quad L \geq Q - \frac{w}{2r}$$

$$(**) \quad w = \lambda$$

$$C(0, Q) = w \cdot Q$$

$$\begin{aligned}
 C\left(\left(\frac{w}{2r}\right)^2, Q - \frac{w}{2r}\right) &= r \cdot \left(\frac{w}{2r}\right)^2 + w\left(Q - \frac{w}{2r}\right) \\
 &= \cancel{r} \cdot \frac{w^2}{4\cancel{r}} + wQ - \frac{w^2}{2r} = \frac{w^2}{4r} - \frac{w^2}{2r} + w \cdot Q \\
 &= -\frac{w^2}{4r} + w \cdot Q < w \cdot Q = C(0, Q)
 \end{aligned}$$

Fall $K > 0, L = 0$

$$\leadsto \sqrt{K} = Q \rightarrow K = Q^2$$

$$\begin{aligned}
 (*) \Rightarrow \lambda = 2\sqrt{K} \cdot r = 2 \cdot Q \cdot r \\
 (**) \Rightarrow v \leq \lambda
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (*) \Rightarrow \lambda = 2\sqrt{K} \cdot r = 2 \cdot Q \cdot r \\ (**) \Rightarrow v \leq \lambda \end{aligned}} \right\} 2 \cdot Q \cdot r \geq v \Leftrightarrow Q \geq \frac{w}{2r} \quad \checkmark$$

$$C(Q^2, 0) = r \cdot Q^2 \stackrel{?}{>} -\frac{w}{4r} + v \cdot Q \quad (v)$$

Fall $K = 0, L > 0$

$$\sqrt{0} + 0 = 0 \neq Q \quad \downarrow$$

Nichtnegativitätsbedingungen

Betrachte das Nutzenmaximierungsproblem

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \ln(1+x) + y \text{ u.d.B. } x + 16y = 495, x \geq 0, y \geq 0$$

- a) Schreibe die notwendigen Bedingungen mit Nichtnegativitätsbedingungen für eine Lösung auf.
- b) Bestimme die Lösung des Problems.
- c) Schätze ab, um wieviel der Nutzen ungefähr zunimmt, wenn das Einkommen von 495 auf 500 steigt.

a) $\max_{x, y \in \mathbb{R}_+} \ln(1+x) + y \quad \text{s.t.} \quad x + 16y = 495$

$$\mathcal{L}(x, y) = \ln(1+x) + y - \lambda(x + 16y - 495)$$

$$\mathcal{L}'_1 = \frac{1}{1+x} - \lambda \leq 0 \quad (*) \quad (=0 \text{ falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2 = 1 - \lambda \cdot 16 \leq 0 \quad (**) \quad (=0 \text{ falls } y > 0)$$

b) Fall $x, y > 0$ $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{1+x} = \lambda \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 = 1+x \Rightarrow x^* = 15 > 0$

NB $15 + 16 \cdot y = 495 \Leftrightarrow 16 \cdot y = 480 \Leftrightarrow y^* = 30 > 0$

Fall $x=0, y > 0$ $\Rightarrow y = \frac{495}{16}$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \lambda \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 \leq 1+x \Leftrightarrow 15 \leq x \quad \checkmark$

Fall $x > 0, y=0$ $\Rightarrow x = 495$

Fall $x=y=0$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{496} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{496} < \frac{1}{16} \\ \frac{1}{496} > \frac{1}{16} \end{array} \right\} \quad \checkmark$

NB $\checkmark$

$$c) \quad U^*(m) = U(x^*(m), y^*(m))$$

Eur. Th.

$$\frac{dU^*(m)}{dm} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad dU^*(m) = \lambda \cdot dm$$

$$\Delta U^*(m) \approx \lambda \cdot \Delta m$$

In der Aufgabe:

$$\lambda = \frac{1}{16}, \quad \Delta m = 500 - 495 = 5 \Rightarrow \Delta U^*(m) = \frac{1}{16} \cdot 5 = \frac{5}{16}$$

Für $m = 500$ anstelle von 495:

$$x^* = 15$$

$$y^* = \frac{500 - 15}{16} = \frac{485}{16}$$

$$\frac{480}{16}$$



$$\left. \begin{aligned} U^*(495) &= \ln(1+15) + 30 = \ln(16) + 30 \\ U^*(500) &= \ln(1+15) + \frac{485}{16} = \ln(16) + \frac{485}{16} \end{aligned} \right\} \Delta U^* = \frac{485}{16} - 30$$

$$= \frac{485}{16} - \frac{480}{16}$$

$$= \frac{5}{16}$$

Aufgabe zu quasilinearer Nutzenfunktion

Gegeben sei das Nutzenmaximierungsproblem

$$\max_{x,y \geq 0} v(x) + y \text{ u.d.B. } px + qy = m$$

mit $v : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $v'(x) > 0$, $v''(x) < 0$ für alle $x \geq 0$.

- a) Schreibe die notwendigen Bedingungen mit Nichtnegativitätsbedingungen für eine Lösung auf.
- b) Bestimme die Lösung des Problems. Achte dabei auf geeignete Fallunterscheidungen.

a) $\max_{x, y \geq 0} \quad V(x) + y \quad \text{s.t.} \quad px + qy = m \quad (NB)$

$$\mathcal{L}(x, y) = V(x) + y - \lambda (px + qy - m)$$

$$\mathcal{L}'_1 = V'(x) - \lambda p \leq 0 \quad (*) \quad (=0 \text{ falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2 = 1 - \lambda q \leq 0 \quad (**) \quad (=0 \text{ falls } y > 0)$$

Fall $x, y > 0$ $(*) \Rightarrow p\lambda = V'(x) \Leftrightarrow (V'(p\lambda))^{-1} = x^*$ $x^* = (V'(\frac{p}{q}))^{-1}$
 $(**) = \lambda = \frac{1}{q}$ $y^* = \frac{m}{q} - \frac{p}{q} \cdot x^*$

Fall $x=0, y>0 \Rightarrow y = \frac{m}{q}$

$$\left. \begin{array}{l} (*) \quad V'(0) \leq \lambda \cdot p \\ (**) \quad \lambda = \frac{1}{q} \end{array} \right\} \quad V'(0) \leq \frac{p}{q}$$

Fall $x>0, y=0 \Rightarrow x = \frac{m}{p}$

$$\left. \begin{array}{l} (*) \quad V'(\frac{m}{p}) = \lambda p \geq \frac{p}{q} \\ (**) \quad \lambda \geq \frac{1}{q} \end{array} \right\}$$

