

Nebenbedingungen in Gleichheit



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

18.1 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Nichtnegativitätsbedingungen

Beispiel Konsumententscheidung

Bestes Güterbündel, welches leistbar ist

„**Bestes Güterbündel**“: optimal im Sinne der Nutzenfunktion

Zielfunktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

„**leistbar**“: Kosten entsprechen dem verfügbaren Budget

Nebenbedingung $p \cdot x + y = m$

m : verfügbares Geld

x : Konsumgut, p : Preis hierfür

y : Ausgaben für andere Güter

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} u(x,y) \text{ unter der Nebenbedingung } px + y = m$$

Einfache Lösung

Forme Nebenbedingung nach y um:

$$px + y = m \Leftrightarrow y = m - px$$

und evaluiere u nur entlang des Pfades:

$$(x, y) \text{ mit } y = m - px$$

Definiere univariate Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) := u(x, m - px)$$

ohne Nebenbedingung.

Probleme:

Nebenbedingung nicht immer leicht nach y aufzulösen.

Gelingt nur bei zwei Gütern.

Optimierungsproblem mit Nebenbedingung

Seien

$$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar und sei die Zahl c ein möglicher Wert von g .

Optimierungsproblem:

Höhenlinie

$$\max / \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ unter der Bedingung } g(x,y) = c$$

Lambda

Assoziiere den **Lagrange Multiplikator** $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Nebenbedingung $g(x,y) = c$.

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

= 0 $\Rightarrow$ Nebenbedingung erfüllt

Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

Zielfunktion f

Nebenbedingung $g(x, y) = c$

Lagrangemultiplikator λ

Anmerkung:

Für Paare (x, y) mit $g(x, y) = c$ gilt $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y)$

1. Partielle Ableitungen:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y)$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y)$$

1. Partielle Ableitung nach λ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g(x, y) + c$$

Die Methode des Lagrange-Multiplikators

- (i) Schreibe die Lagrange-Funktion mit dem Multiplikator λ auf.
- (ii) Differenziere $\mathcal{L}$ nach x und y .
- (iii) *Bedingungen erster Ordnung:*

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) = 0$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) = 0$$

Nebenbedingung:

$$g(x, y) = c$$

- (iv) Wenn es eine Lösung (x^*, y^*) des Optimierungsproblems mit der bindenden Nebenbedingung gibt, so ist (x^*, y^*) Teil einer Lösung von (iii).

Wichtig:

- Wenn $g'_1(x^*, y^*) = g'_2(x^*, y^*) = 0$, kann die Methode scheitern.

Belindas Konsumproblem

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} x^2 \cdot y \quad \text{u.d.B.} \quad x+y=m$$

Nutzenfunktion: $u(x, y) = x^2 y$

Budgetbedingung: $x + y = m$, ($m > 0$ Belindas Einkommen)

$$1. \mathcal{L}(x, y) = x^2 y - \lambda (x + y - m)$$

$$\begin{aligned} 2. \mathcal{L}'_1 &= 2x \cdot y - \lambda \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow 2x \cdot y = \lambda \\ \mathcal{L}'_2 &= x^2 - \lambda \stackrel{!}{=} 0 & \Leftrightarrow x^2 = \lambda \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathcal{L}'_1 \\ \mathcal{L}'_2 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow 2x \cdot y = x^2$$
$$x + y = m \quad (\text{NB})$$

$$x=0 \stackrel{\text{NB}}{\Rightarrow} 0 + y = m \quad 1. \text{ Kandidat: } (x_1, y_1) = (0, m)$$

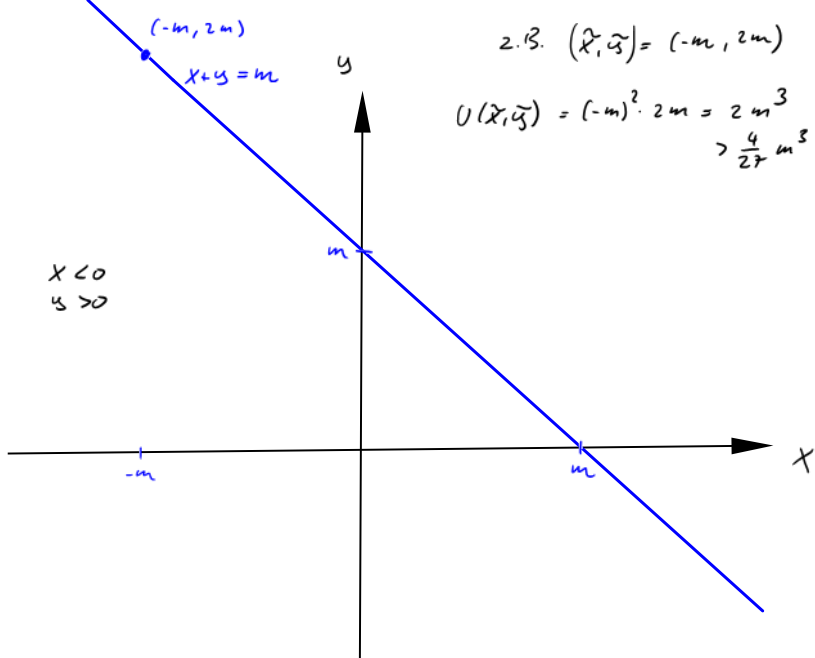
$$x=2y \stackrel{\text{NB}}{\Rightarrow} 2y + y = m \Leftrightarrow 3y = m \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}m$$

$$2. \text{ Kandidat: } (x_2, y_2) = \left(\frac{2}{3}m, \frac{1}{3}m\right)$$

$$U(x_1, y_1) = 0^2 \cdot m = 0$$

$$U(x_2, y_2) = \left(\frac{2}{3}m\right)^2 \cdot \frac{1}{3}m = \frac{4}{27}m^3 = U^*(m)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{2}{3}m\right)^2 = \frac{4}{9}m^2$$
$$\frac{dU^*(m)}{dm} = \frac{4}{27} \cdot 3 \cdot m^2 = \frac{4}{9}m^2 = \lambda_2$$



$$2. \text{B. } (\tilde{x}, \tilde{y}) = (-m, 2m)$$

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-m)^2 \cdot 2m = 2m^3 \\ > \frac{4}{27} m^3$$

18.2 Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Wir können den Lagrange-Multiplikator λ als „Schattenpreis“ für die Restriktion $g(x, y) = c$ interpretieren.

Eine Veränderung der Konstante c führt zu einer Veränderung des Maximumwerts der Zielfunktion f .

Dies entspricht genau der Zahl λ .

Etwas genauer:

Seien $x^*(c)$, $y^*(c)$ und $\lambda^*(c)$ die Lösungen der restringierten Optimierung und sei $f^*(c)$ der Wert der Zielfunktion im Optimum.

Dann gilt:

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda^*(c)$$

Kontext Envelope Theorem

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, c) = f(x, y) - \lambda (g(x, y) - c)$$

$$\max_{x, y, \lambda} / \min_{x, y, \lambda} \mathcal{L} \quad \leadsto \quad x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c)$$

$$\text{BEO: } \mathcal{L}'_1 = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathcal{L}'_2 = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\mathcal{L}'_3 = -g(x, y) + c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}$$

$$\mathcal{L}(x^*(c), y^*(c), \lambda^*(c), c) = \mathcal{L}^*(c)$$

$$\frac{d\mathcal{L}^*(c)}{dc} = \underbrace{\mathcal{L}'_1}_{=0} \cdot \frac{dx^*(c)}{dc} + \underbrace{\mathcal{L}'_2}_{=0} \cdot \frac{dy^*(c)}{dc} + \underbrace{\mathcal{L}'_3}_{=0} \cdot \frac{d\lambda^*(c)}{dc} + \boxed{\lambda^*(c)}$$

18.3 Mehrere Lösungskandidaten

Eine Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingung erfüllt die Bedingungen erster Ordnung der Lagrangefunktion und die Nebenbedingung.

Deswegen stellen alle Tripel (x^*, y^*, λ^*) , die diese Bedingungen erfüllen, Lösungskandidaten dar.

Bei mehreren Lösungskandidaten müssen wir entscheiden, welcher Kandidat tatsächlich das Problem löst.

$$\max / \min_{x,y \in \mathbb{R}} \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{Zielfunktion}} \text{ u.d.B. } \underbrace{x^2 + xy + y^2 = 3}_{\text{Nebenbedingung}}$$

$$1. \mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda (x^2 + xy + y^2 - 3)$$

$$2. \mathcal{L}'_1 = 2x - \lambda (2x + y) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow 2x = \lambda (2x + y) \quad (*)$$

$$\mathcal{L}'_2 = 2y - \lambda (x + 2y) \stackrel{?}{=} 0 \Leftrightarrow 2y = \lambda (x + 2y) \quad (**)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 3 \quad (NB)$$

$$\text{Falls } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 0 \Leftrightarrow 2x = -y \\ \Rightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right\} x, y = 0 \Rightarrow NB \text{ verletzt}$$

$$\text{Falls } \left. \begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ \Rightarrow 2y = 0 \end{array} \right\} x, y = 0 \Rightarrow NB \text{ verletzt.}$$

$$(*) \Rightarrow \lambda = \frac{2x}{2x+y} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{2x}{2x+y} = \frac{2y}{x+2y} \\ \Leftrightarrow x(x+2y) = y(2x+y) \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xy = 2xy + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 = y^2 \\ \Leftrightarrow x = -y \text{ oder } x = y \end{array} \right\}$$

$$x = -y \quad \text{in NB:} \quad x^2 + xy + y^2 = 3$$

$$\Rightarrow (-y)^2 - y \cdot y + y^2 = 3$$

$$\Rightarrow \cancel{y^2} - \cancel{y^2} + y^2 = 3 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3} \text{ oder } y = \sqrt{3}$$

Zwei Kandidaten: $(x_1, y_1) = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ $(x_2, y_2) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ *Maximum*

$$x = y \quad \text{in NB:} \quad y^2 + y \cdot y + y^2 = 3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot y^2 = 3$$

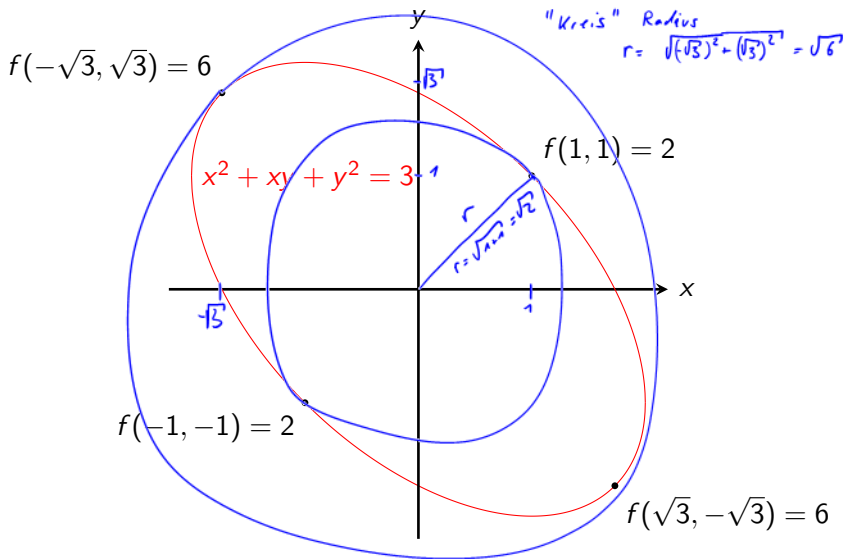
$$\Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1 \text{ oder } y = 1$$

Zwei Kandidaten $(x_3, y_3) = (-1, -1)$ $(x_4, y_4) = (1, 1)$ *Minimum*

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 3 + 3 = 6$$

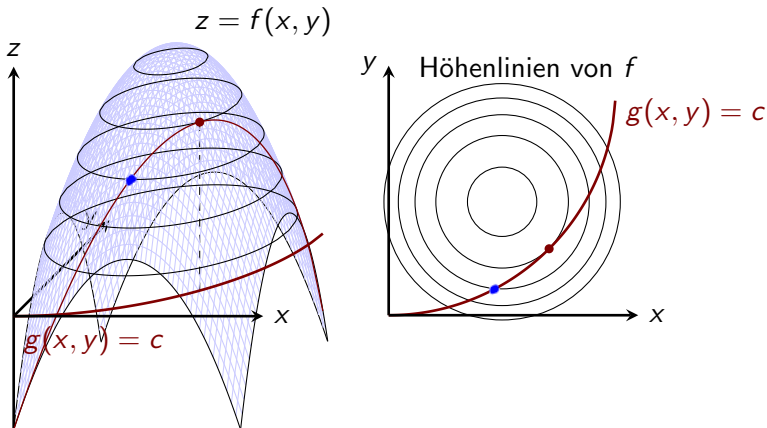
$$f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda (x^2 + xy + y^2 - 3)$$



18.4 Warum die Lagrange-Methode funktioniert

Ein geometrisches Argument



Der Graph von $g(x, y) = c$ ist im Optimum tangential zu einer Höhenlinie von f .

⇒ Die Steigungen des Graphen und der Höhenlinie stimmen überein.

Ein analytisches Argument

Die Gleichung $f(x, y) = \bar{z}$ und die Nebenbedingung $g(x, y) = c$ definieren Höhenlinien von f und g .

Die Steigungen dieser Höhenlinien sind definiert durch:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Im Optimum (x, y) sind die Höhenlinien von f und g tangential, sie haben also die gleiche Steigung:

$$-\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Tangentialbedingung

Ein analytisches Argument

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda \cdot g'_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'_1(x, y)}{g'_1(x, y)}$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda \cdot g'_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'_2(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Demnach muss gelten:

$$\frac{f'_1(x, y)}{g'_1(x, y)} = \frac{f'_2(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

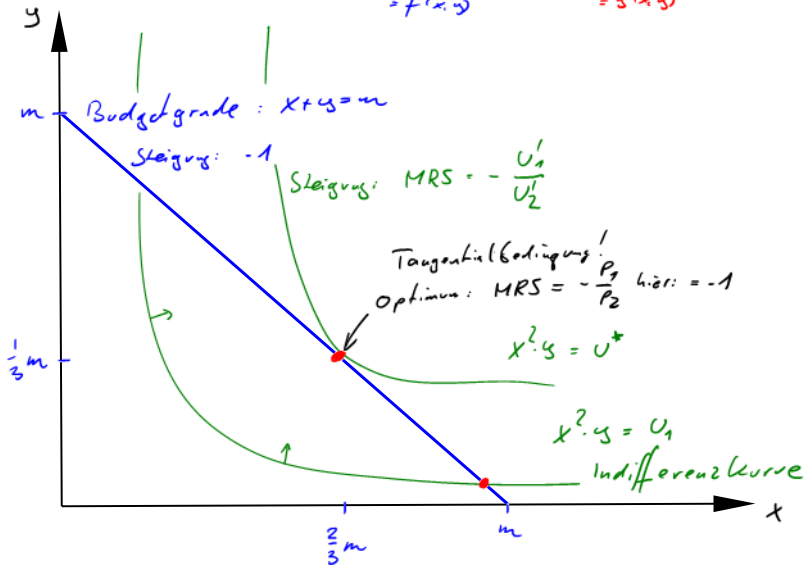
Diese Bedingung ist äquivalent zur Tangentialbedingung:

$$-\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)} = -\frac{g'_1(x, y)}{g'_2(x, y)}$$

Befunda

$$U(x, y) = \underbrace{x^2 \cdot y}_{= f(x, y)}$$

$$\underbrace{x + y = m}_{= g(x, y)}$$



Nichtnegativitätsbedingungen

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften fordern oft, dass Nebenbedingungen in Ungleichheit erfüllt werden müssen.

Die häufigste Nebenbedingung in Ungleichheit ist die **Nichtnegativitätsbedingung**.

Für diesen Fall kann die entsprechende Bedingung erster Ordnung sehr leicht angepasst werden.

Nichtnegativitätsbedingungen

Optimierungsproblem

$$\max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) \text{ u.d.B. } g(x,y) = c \ \& \ x \geq 0$$

Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$\mathcal{L}'_1(x,y) \leq 0 \text{ (mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = 0$$

Beispiel 2: Präferenzen mit Sättigungspunkt

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \underbrace{-(x-M)^2 - (y-5)^2}_{\text{Zielfunktion}} \text{ u.d.B. } \underline{x \geq 0}$$

hier: = Lagrangefunktion, da keine NB in Gleichheit

Notwendige Bedingungen erster Ordnung:

$$(*) \quad -2(x-M) \leq 0 \quad (\text{mit Gleichheit, falls } x > 0)$$

$$-2(y-5) = 0 \Leftrightarrow y=5$$

Fall $M > 0$

$$(*) \Leftrightarrow x-M \geq 0 \Leftrightarrow x \geq M$$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x=M$$

Falls $M \leq 0$

$$\Rightarrow x=0$$

Zusammenfassung

- ▶ Lagrange-Multiplikatoren & Lagrange-Funktion
- ▶ Notwendige Bedingungen erster Ordnung
- ▶ Lagrange-Multiplikatoren als Schattenpreise
- ▶ Tangentialbedingung
- ▶ Nichtnegativitätsbedingungen