

Formelsammlung zu Kapitel 12

AR(1)-Prozess

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

u_0 : Startwert; $\rho \in \mathbb{R}$: unbekannt, fest; ε_t iid mit $E[\varepsilon_t|X] = 0$, $Var(\varepsilon_t|X) = \sigma_\varepsilon^2$.

AR(1)-Prozess **stationär**, falls $E[u_t] = \mu \quad \forall t$, $Var(u_t) = \sigma^2 \quad \forall t$.

Falls $|\rho| < 1$: $E[u_t] = 0 \quad \forall t$, $Var(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \quad \forall t$

$$\mathbb{V}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

Quasidifferenzierung: $\tilde{y} = Py$, $\tilde{X} = PX$, $\tilde{u} = Pu = \varepsilon$ (**für** $t > 1$)

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} P\Omega P' = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\rho^2 \end{pmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

MLR 5 erfüllt (bis auf die erste Zeile und Spalte).

t-Test auf Autokorrelation

Hilfsregression mit OLS-Residuen: (problematisch, da OLS-Standardfehler falsch ist.)

$$\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad H_0 : \delta_1 = 0, \quad t = \frac{\hat{\delta}_1}{se(\hat{\delta}_1)}.$$

Durbin-Watson-Test

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho}) \in [0, 4], \quad H_0 : \rho = 0, \quad H_1 : \rho > 0.$$

$DW > d_U$: H_0 nicht verwerfen, $DW \in [d_L, d_U]$ keine eindeutige Aussage, $DW < d_L$ H_0 verwerfen.

Breusch-Godfrey-Test

Hilfsregression:

OLS Residuen $\hat{u}_t$ auf $\hat{u}_{t-1}$ und X regressieren $\rightarrow R^2$

$$BG = (n-1)R^2 \sim \chi_1^2 \text{ (asymptotisch)}$$