

Formelsammlung für Kapitel 8 Heteroskedastizität

$$\Sigma(u|X) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \Omega \text{ mit } \Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \end{pmatrix}.$$

$$\Omega^{-\frac{1}{2}} = P = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

Transformation der Daten:

$$\tilde{X} = PX \text{ und } \tilde{y} = Py.$$

→ einzelne Beobachtungen:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{\sigma}{\sigma_i} x_{ij} \text{ und } \tilde{y}_i = \frac{\sigma}{\sigma_i} y_i.$$

GLS-Schätzer:

$$\tilde{\beta} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y = (\tilde{X}' \tilde{X})^{-1} \tilde{X}' \tilde{y}$$

FGLS: Schätzung von σ_i durch $\hat{\sigma}_i$, $\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\hat{\sigma}_i}$ und $\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\hat{\sigma}_i}$.

Breusch-Pagan-Test: Nullhypothese $H_0 : \Sigma(u|X) = \sigma^2 I$.

1. OLS Regression $\rightarrow \hat{\beta} \rightarrow \hat{u}$

2. Hilfsregression:

$$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_{i1} + \dots + \delta_k x_{ik} + \epsilon_i.$$

3. Globaler F-Test Hilfsregression

White-Test: Nullhypothese $H_0 : \Sigma(u|X) = \sigma^2 I$.

1. OLS Regression $\rightarrow \hat{\beta} \rightarrow \hat{u}$

2. Hilfsregression (beispielhaft für drei Regressoren):

$$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 x_{i1} + \delta_2 x_{i2} + \delta_3 x_{i3} + \delta_4 x_{i1}^2 + \delta_5 x_{i2}^2 + \delta_6 x_{i3}^2 + \delta_7 x_{i1} x_{i2} + \delta_8 x_{i1} x_{i3} + \delta_9 x_{i2} x_{i3} + \epsilon_i.$$

3. Globaler F-Test Hilfsregression

Alternativer White-Test: Nullhypothese $H_0 : \Sigma(u|X) = \sigma^2 I$.

1. OLS Regression $\rightarrow \hat{\beta} \rightarrow \hat{u}$

2. Hilfsregression

$$\hat{u}_i^2 = \delta_0 + \delta_1 \hat{y} + \delta_2 \hat{y}^2 + \epsilon.$$

3. Globaler F-Test Hilfsregression

Multiplikative Heteroskedastizität

$$\sigma_i^2 = e^{\delta_0 + \delta_1 x_{i1} + \dots + \delta_k x_{ik}} \Leftrightarrow \ln(\sigma_i^2) = \delta_0 + \delta_1 x_{i1} + \dots + \delta_k x_{ik}$$

Hilfsregression

$$\ln(\hat{u}_i^2) = \delta_0 + \delta_1 x_{i1} + \dots + \delta_k x_{ik} + v_i \rightarrow \hat{\sigma}_i^2 = e^{\widehat{\ln(\hat{u}_i^2)}}$$