

Optimierung ohne Nebenbedingungen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

Aufgabe 17.1.1 von Seite 793

Die Funktion f , die für alle (x, y) durch $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3$ definiert ist, hat eine Maximumstelle. Bestimme die entsprechenden Werte von x und y .

$$f'_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x + 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f'_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \boxed{y = 2}$$

$$f''_{11} = -4$$

$$f''_{12} = 0$$

$$f''_{21} = 0$$

$$f''_{22} = -2$$

$$f'' = \begin{pmatrix} \underline{-4} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit

$\Rightarrow f$ streng konkav

$(x, y) = (1, 2)$ einziges Maximum

$$|f''| = (-4) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 8 > 0$$

Aufgabe 17.2.2 von Seite 798

Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Arten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten für die Produktion von x Einheiten der Sorte A und y Einheiten der Sorte B sind

$$c(x, y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514$$

Nehme an, dass das Unternehmen den Output zu einem Preis pro Einheit von 24 Euro für A und 12 Euro für B verkauft.

- a) Finde die täglichen Produktionsniveaus x^* und y^* , die den Gewinn maximieren.
- b) Es wird von dem Unternehmen verlangt, dass es genau 54 Einheiten pro Tag von den beiden Arten zusammen produziert. Wie sieht der Produktionsplan jetzt aus?

$$a) \pi(x, y) = \underbrace{24 \cdot x + 12 \cdot y}_{\text{Erlös}} - C(x, y), \quad x, y \geq 0 \quad \text{Fixkosten}$$

$$= 24 \cdot x + 12 \cdot y - \underbrace{(2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514)}_{\text{Kosten}}$$

$$= \underline{24 \cdot x} + \underline{12y} - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + \underline{40x} + \underline{20y} - 514$$

$$= -2x^2 + 4xy - 4y^2 + 64x + 32y - 514$$

$$\begin{aligned} \pi'_1 &= -4x + 4y + 64 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow -x + y + 16 = 0 \\ \pi'_2 &= 4x - 8y + 32 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} + \Rightarrow -y + 24 = 0$$

$$x - 2 \cdot 24 + 8 = 0$$

$$x - 40 = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

$$\begin{aligned} x^* &= 40 \\ y^* &= 24 \end{aligned} \quad \text{innere Stelle}$$

$$\begin{aligned} \pi''_{11} &< 0 \\ \pi'' &= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad |\pi''| = (-4) \cdot (-8) - 4 \cdot 4 \\ &= 32 - 16 = 16 > 0 \end{aligned}$$

negativ definit $\Rightarrow \pi$ str. konkav $\Rightarrow \text{Max V}$

$$b) \quad \max_{x, y \geq 0} \pi(x, y) \quad \text{u.d.B.} \quad x + y = 54$$

$$\Leftrightarrow y(x) = 54 - x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\max_{0 \leq x \leq 54} \pi(x, y(x))$$

$$\text{BEO} \quad \frac{d\pi}{dx} \stackrel{!}{=} 0$$

Kettenregel

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}_{=-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial \pi}{\partial y}$$

$$x + y = 54$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \underline{-4x} + \underline{4y} + 64 \stackrel{!}{=} \underline{4x} - \underline{8y} + 32 = \frac{\partial \pi}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y = -32 & \Leftrightarrow -2x + 3y = -8 \\ 2x + 2y = 108 & \end{cases} \quad \begin{matrix} + \cdot 2 \\ \Rightarrow 5y = 100 \\ \Rightarrow y = 20 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = 34$$

Aufgabe 17.3.2 von Seite 805

Betrachte die Funktion f , definiert für alle (x, y) durch
 $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y^2$.

- a) Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.
- b) Zeige, dass die kritischen Stellen $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ sind und klassifiziere diese.

$$a) \quad f'_1 = 2x + 2y^2 \quad f'_2 = 4xy + 4y$$

$$f'' = \begin{pmatrix} 2 & 4y \\ 4y & 4x + 4 \end{pmatrix}$$

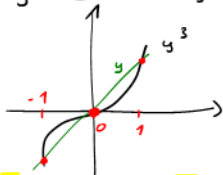
b)

$$\begin{aligned} 2x + 2y^2 &= 0 & \Leftrightarrow & x + y^2 = 0 \quad (\text{I}) \\ 4xy + 4y &= 0 & \Leftrightarrow & xy + y = 0 \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

$$(\text{I}) \Rightarrow \underline{x = -y^2}$$

$$(\text{II}) \Rightarrow -y^2 \cdot y + y = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad y = y^3$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ oder } 1 = y^2 \quad (\Leftrightarrow)$$



$$x=0$$

$$x=-1$$

$$x=-1$$

$$y=0$$

$$y=-1$$

$$y=1$$

b)

$$f'' = \begin{pmatrix} \underline{2} & 4y \\ 4y & 4x+4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (0, 0) \\ (-1, -1) \\ (-1, 1) \end{matrix}$$

$$|f''| = 2 \cdot (4x+4) - 4y \cdot 4 \cdot y$$

$$= 8x + 8 - 16y^2$$

Kann in Abhängigkeit von x und y positiv oder negativ sein.

$$\underline{(0,0)} \quad |f''| = 8 \cdot 0 + 8 - 16 \cdot 0^2 = 8 > 0$$

f ist in der Umgebung von $(0,0)$ streng konvex

$(0,0)$ ist in der Umgebung von $(0,0)$ ein striktes Minimum

„ $(0,0)$ ist ein lokales Minimum“

$$(-1, -1) \& (-1, 1)$$

$$|f''| = 8 \cdot (-1) + 8 - 16 \cdot 1 = -8 + 8 - 16 = -16 < 0$$

$(-1, -1)$ & $(-1, 1)$ sind Sattelpunkte

Aufgabe 17.5 von Seite 831

Es sei $f(x, y, a) = ax^2 - 2x + y^2 - 4ay$, wobei a ein Parameter ist.

Bestimme für jedes feste $a \neq 0$ die einzige kritische Stelle $(x^*(a), y^*(a))$ für die Funktion f bezüglich (x, y) .

Bestimme auch die Optimalwertfunktion $f^*(a) = f(x^*(a), y^*(a), a)$ und verifiziere das Envelope Theorem in diesem Fall.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad 2ax = 2 \Leftrightarrow ax = 1 \Leftrightarrow x^*(a) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4a \stackrel{!}{=} 0 \quad 2y = 4a \Leftrightarrow y^*(a) = 2a$$

$$\boxed{f^*(a) = f(x^*(a), y^*(a), a) = a\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{a} + (2a)^2 - 4a \cdot 2a} \\ = \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + 4a^2 - 8a^2 = -\frac{1}{a} - 4a^2$$

Env. Th.

$$\frac{df^*(a)}{da} = \frac{1}{a^2} - 8a$$

$$\frac{df^*(a)}{da} = \frac{\partial f}{\partial a}(x^*, y^*, a) = x^{*2} - 4y^* = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot 2a = \frac{1}{a^2} - 8a$$

Lineare Regression (Optimierung mit quadr. Zielfunktion)

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \quad i = 1, \dots, n$$

y_i zu erklären
beobachtet

α Parameter
fest & unbekannt

β erklärende
Variable
beobachtet

u_i Störterm
unbeobachtet

n Stichproben-
umfang

1. Vermutung a, b für α, β

2. Prognose $\hat{y}_i = a + b \cdot x_i$

3. Prognosefehler $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - a - b \cdot x_i$ „Residuum“

4. Zielfunktion $S(a, b) = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2$

→ kleinste Quadrate Methode

Lösung „kleinste Quadrate Schätzer“ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} S(a, b) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + b \cdot x_i))^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i^2 - 2y_i(a + b x_i) + (a + b x_i)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i^2 - 2y_i a - 2y_i b x_i + a^2 + 2ab x_i + b^2 x_i^2 \right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2}_{\overline{yy}} - 2a \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i}_{\overline{y}} - 2b \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i x_i}_{\overline{xy}} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot a^2 + 2ab \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}_{\overline{x}} + b^2 \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}_{\overline{xx}}
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\overline{yy}}_{\text{const.}} + \underbrace{-2a\overline{y} - 2b\overline{xy}}_{\text{linear}} + \underbrace{a^2 + 2ab\overline{x} + b^2\overline{xx}}_{\text{quadrat.}}$$

$$= \overline{yy} + (-2\overline{y}, -2\overline{xy}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (a, b) \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{n} S(a, b) = \overline{y y} + (-2\overline{y}, -2\overline{xy}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (a, b) \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\nabla \frac{1}{n} S(a, b) = \begin{pmatrix} -2\overline{y} \\ -2\overline{xy} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}^T \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = (x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = (A + A') \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix} \quad \text{falls existiert}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix} \right| &= 1 \cdot \overline{xx} - \bar{x} \cdot \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= \dots = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_{xx} > 0 \end{aligned}$$

Stichprobenvarianz

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{S_{xx}} \begin{pmatrix} \overline{xx} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung $\alpha, \hat{\beta}$ erfüllt

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{S_{xx}} \begin{pmatrix} \overline{xx} & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{S_{xx}} \begin{pmatrix} \overline{xx} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy} \\ -\bar{x} \cdot \bar{y} + 1 \cdot \overline{xy} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_{xx}} = \dots = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$\alpha = \frac{\overline{xx} \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{S_{xx}} = \dots = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x}$$

Hesse matrix

$$\frac{1}{n} S''(a,b) = 2 \begin{pmatrix} \underbrace{1}_{>0} & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{xx} \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{1}{n} S''(a,b) \right| = 2^2 \cdot S_{xx} > 0 \rightarrow \frac{1}{n} S(a,b) \text{ streng konvex}$$