

# Optimierung ohne Nebenbedingungen



Moodle



Lehrbuch

---

<sup>1</sup>Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

17.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion

17.5 Der Extremwertsatz

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

# Definitionen: Innere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **inneren Punkt** einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  existiert ein Kreis, der vollständig in  $D$  liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  existiert kein Kreis, der vollständig in  $D$  liegt.



# Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  differenzierbar.

Die Funktion  $f$  kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt  $(x_0, y_0)$  ihres Definitionsbereichs  $D$  annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt  $(x, y) = (x_0, y_0)$  die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f'_1(x, y) = 0, \text{ und } f'_2(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

## Beispiel 17.1.1

Die Funktion  $f$  sei für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

Setze voraus, dass  $f$  eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x - 2y + 36 \stackrel{!}{=} 0 \quad : 2$$

$$-2x - y + 18 = 0 \Leftrightarrow y = 18 - 2x \quad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x - 4y + 42 \stackrel{!}{=} 0 \quad : 2$$

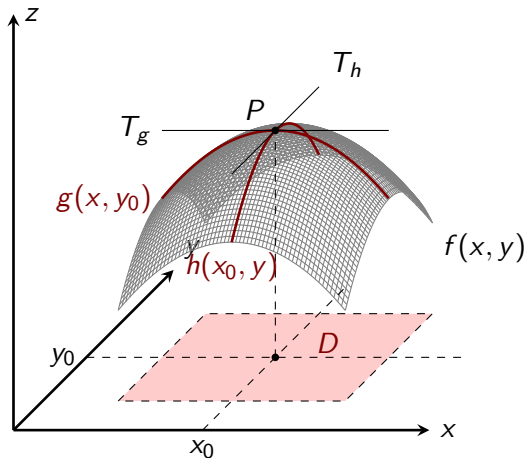
$$-x - 2y + 21 = 0 \Leftrightarrow x = 21 - 2y \quad (**)$$

$$(*) \quad y = 18 - 2(21 - 2y) = 18 - 42 + 4y \Leftrightarrow -3y = -24$$
$$\Leftrightarrow \boxed{y = 8}$$

$$(**) \quad x = 21 - 2 \cdot 8 = 5$$

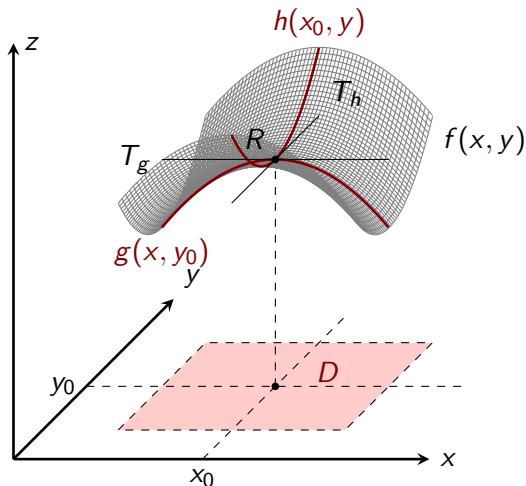
$$\boxed{x = 5}$$

## Maximumpunkt $P$ , stationäre Stelle $(x_0, y_0)$



Steigung von  $T_g$ :  $f'_1(x_0, y_0) = 0$     Steigung von  $T_h$ :  $f'_2(x_0, y_0) = 0$

## Sattelpunkt $R$ , stationäre Stelle $(x_0, y_0)$



Steigung von  $T_g$ :  $f'_1(x_0, y_0) = 0$     Steigung von  $T_h$ :  $f'_2(x_0, y_0) = 0$

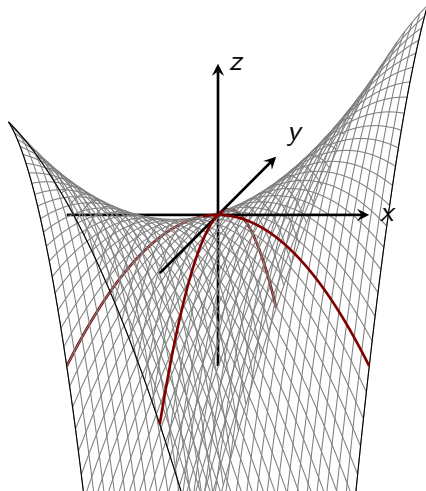
## 17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

Sei die Funktion  $z = f(x, y)$  von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge  $D$  und sei  $(x_0, y_0)$  eine **innere stationäre Stelle** in  $D$ . Dann gilt:

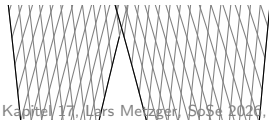
- a) Falls die Funktion  $f$  konkav ist,  
ist  $(x_0, y_0)$  eine Maximumstelle.
- b) Falls die Funktion  $f$  konvex ist,  
ist  $(x_0, y_0)$  eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

$$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$$



$f''_{11} = -2$  und  $f''_{22} = -2$  sind negativ,  $f$  ist aber nicht konkav!



## Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

$$\pi(x, y) = \underbrace{12}_{\text{Preis Output}} \cdot \underbrace{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}_{\text{Produktionsfkt.}} - \underbrace{1,2 \cdot x - 0,6 \cdot y}_{\text{Kosten}}$$

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Bed. 1. Ordnung (BEO / f.o.c.)

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}(x, y) = 12 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1,2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = 1,2 \quad |: 1,2$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} = 1 \Leftrightarrow 5 \cdot y^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \quad (*)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y}(x, y) = 12 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} - 0,6 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} = 0,6 \quad |: 0,6$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}} = 1 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \cdot y^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5} \cdot y^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow 25 y^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow 25 = y^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 25^2$$

$$(*) \quad x^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot (25^2)^{\frac{1}{4}} = 5 \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 5 \cdot 5 = 25$$

→ einzige stationäre Stelle:  
 $x = 25, y = 25^2$

$$x, y \geq 0$$

Hinreichende Bedingung (B20)

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}(x, y) = \overset{=6}{12 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}} - 1,2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y}(x, y) = \overset{=3}{12 \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}} - 0,6$$

$$\pi''_{11} = 6 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$$

$$\pi''_{12} = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\pi''_{21} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{3}{4}}$$

$$\pi''_{22} = 3 \cdot (-\frac{3}{4}) x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{7}{4}}$$

$$\pi'' = \begin{pmatrix} -3 x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}} & \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{9}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}$$

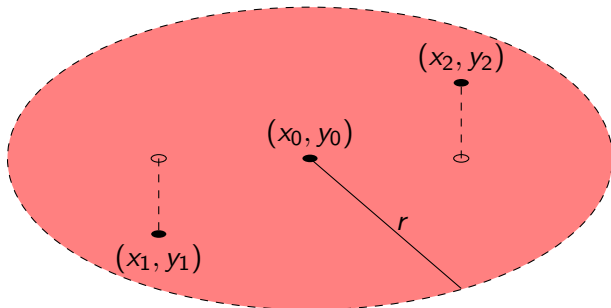
$$\begin{aligned} |\pi''| &= \frac{-3 x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}} (-\frac{9}{4}) x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{7}{4}}}{- \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}} \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}} \\ &= \frac{27}{4} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{4} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} x^{-1} y^{-\frac{3}{2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\pi''_{11} = -3 x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{4}} < 0 \Rightarrow \pi'' \text{ negativ definit} \Rightarrow \pi \text{ streng konkav}$$

$\Rightarrow x=25, y=25^2 \text{ Max-Stelle}$

# Sattelstelle

Eine Sattelstelle  $(x_0, y_0)$  hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl  $r > 0$  zwei Punkte  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  in  $D$  im Umkreis  $r$  von  $(x_0, y_0)$  gibt mit  $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$ .



## 17.4 Beispiel quadratische Zielfunktion: diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen  $p_S$  und  $p_M$  verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_S) = \max\{6000 - 1000p_S, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise  $p_S^*$  und  $p_M^*$  maximieren den Gewinn der Mensa?

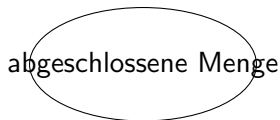
Welcher Preis  $p^*$  maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

## 17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

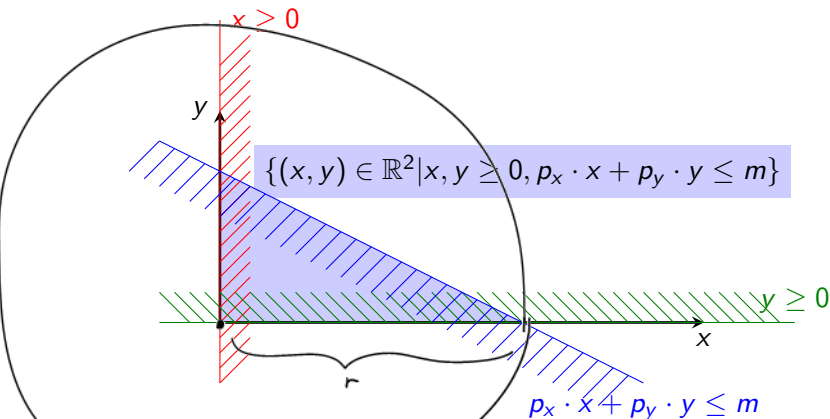
Eine Menge  $D$  ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.



Eine Menge  $D$  ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



## Beispiel: Budgetmenge



Schwache Ungleichungen.

⇒ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

⇒ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

## 17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius  $r < \infty$  gibt, der  $D$  vollständig enthält.

**Beispiel Budgetmenge:**

Wähle  $r = \max \left\{ \frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y} \right\}$ . Der Mittelpunkt des Kreises sei  $(0, 0)$ .

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

## 17.5 Der Extremwertsatz

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann existiert eine Stelle  $(a, b) \in D$ , an der  $f$  ein Minimum hat und es existiert eine Stelle  $(c, d) \in D$ , an der  $f$  ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \text{ für alle } (x, y) \in D$$

### **Bemerkung:**

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an  $D$  sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für  $D = \mathbb{R}_{\geq}^2$  die Funktion  $f(x, y) = -x - y$  ein Maximum an der Stelle  $(0, 0)$ ,  $\mathbb{R}_{\geq}^2$  ist aber nicht beschränkt.

# Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion  $f$ , die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge  $D \subset \mathbb{R}^2$  definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

- (i) Bestimme alle stationären Stellen von  $f$  im Innern von  $D$ .
- (ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von  $f$  auf allen Teilstücken des Randes von  $D$  und die zugehörigen Stellen.
- (iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von  $f$  in  $D$ . Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von  $f$  in  $D$ .

# Ein nützliches Resultat

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend.

Definiere  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $h(x, y) = g(f(x, y))$ .

Der Punkt  $(x^*, y^*) \in D$  maximiert die Funktion  $f$  genau dann, wenn  $(x^*, y^*)$  die Funktion  $h$  maximiert.

## 17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  differenzierbar.

Für  $(x, r) \in D$  bezeichne  $x$  eine Variable und  $r$  einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x f(x, r)$$

bezeichne  $x^*(r)$  den Wert  $x$ , welcher  $f$  bei gegebenem Parameter  $r$  maximiert.

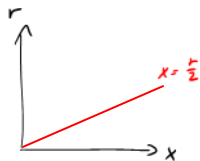
Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

## Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge  $x \geq 0$ , Preis  $r$ , Kosten  $C(x) = x^2$ .

$$\Rightarrow \pi(x, r) = \underbrace{rx}_{\text{Erlös}} - \underbrace{x^2}_{\text{Kosten}}$$



Bedingung erster Ordnung für  $x$ :

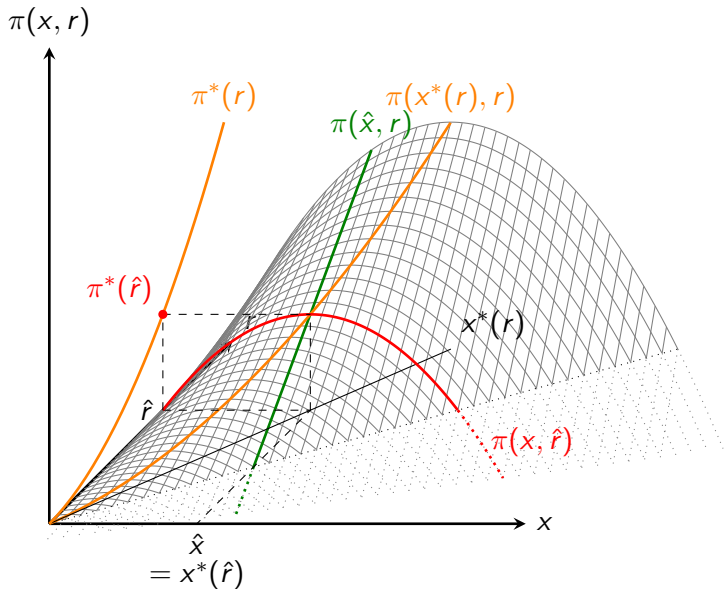
$$\pi'_1(x, r) = r - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Angebotsfunktion

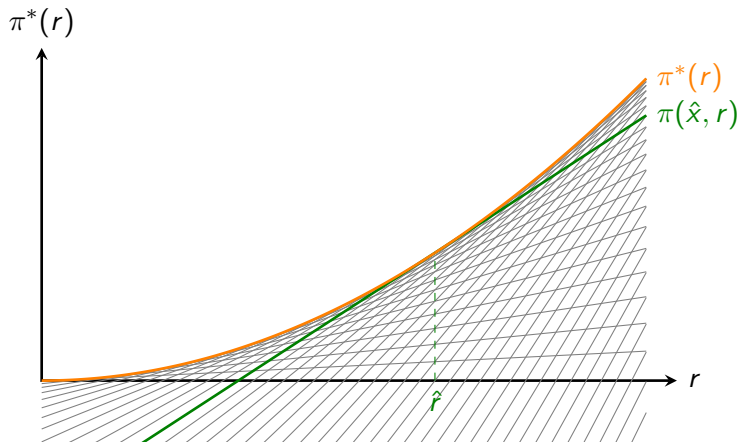
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

## Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



## Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



An der Stelle  $\hat{r}$  sind  $\pi^*(r)$  und  $\pi(\hat{x}, r)$  tangential!

# Envelope-Theorem

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Es bezeichne  $x$  eine Variable und  $r$  einen Parameter.

Sei  $x^*(r)$  der Wert von  $x$ , der  $f(x, r)$  für  $r$  maximiert und sei  $(x^*(r), r)$  ein innerer Punkt von  $D$ . Für  $f^*(r) := f(x^*(r), r)$  gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

**Beweis:**

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \overbrace{\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr}}^{\text{Kettenregel}} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

*Bew:  $\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0$*

Da  $x^*(r)$  der Wert von  $x$  ist, welcher  $f(x, r)$  maximiert, gilt  
 $\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0$ .

# Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge  $x^*(r)$  bei gegebenem Preis  $r$ :

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

Bei der Konsumentenentscheidung

Zielfunktion  $U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$

$$V(x, y) = (U(x, y))^3 = x \cdot y^2$$

Definitionsbereich  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = y^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ Randstelle}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = 2 \cdot x \cdot y \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ Randstellen}$$

→ Es gibt keine inneren stationäre Stellen!

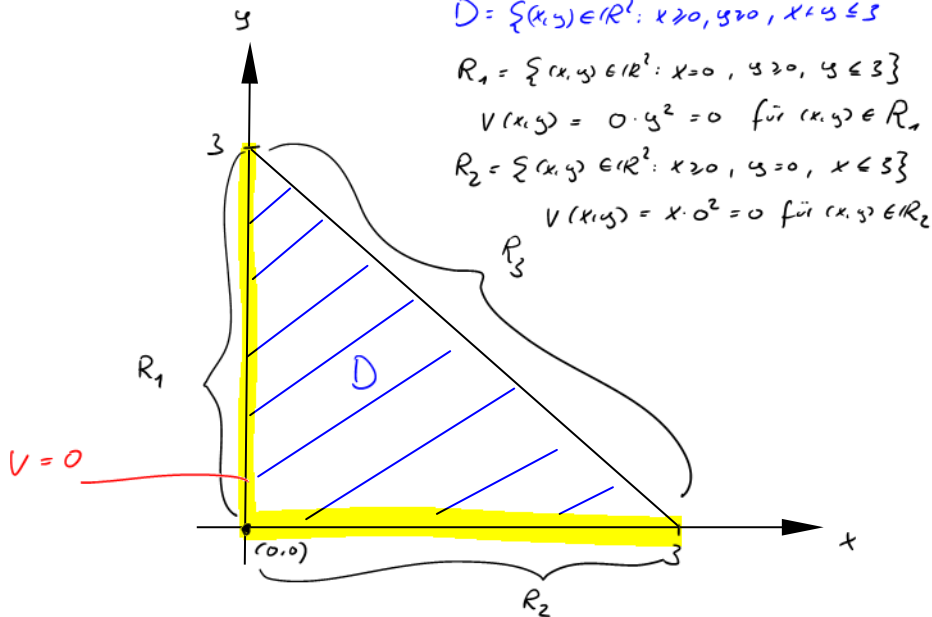
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$$

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \geq 0, y \leq 3\}$$

$$V(x, y) = 0 \cdot y^2 = 0 \text{ für } (x, y) \in R_1$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0, x \leq 3\}$$

$$V(x, y) = x \cdot 0^2 = 0 \text{ für } (x, y) \in R_2$$



$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y = 3\}$$

$$y = 3 - x$$

$$V(x, y) = x \cdot y^2 = \underbrace{x \cdot (3-x)^2}_{g(x)} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}_3$$

$$\max_{0 \leq x \leq 3} g(x)$$

$$\text{BEO: } g'(x) = 1 \cdot (3-x)^2 + x \cdot 2 \cdot (3-x) \cdot (-1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^2 - 2x(3-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \text{oder} \quad 3-x-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \text{oder} \quad x=1$$

Randpunkt                      innerer Punkt

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1 \cdot (3-1)^2 = 1 \cdot 4 = 4 > 0$$

$$g(3) = 0$$

$$x=1 \Rightarrow y = 3-x = 2$$

$\Rightarrow$  Optimale Konsumentscheidung

$$\boxed{x=1, \quad y=2}$$

# Zusammenfassung

- ▶ Notwendige Bedingung: stationäre Stelle
- ▶ Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:  
Funktion konkav  $\Rightarrow$  Maximum  
Funktion konvex  $\Rightarrow$  Minimum
- ▶ Beispiel: Gewinnmaximierung
- ▶ Extremwertsatz  
offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- ▶ Envelope-Theorem  
Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion