

Partielle Ableitungen im Einsatz



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

15.1 Eine einfache Kettenregel

Aufgabe 15.1 von Seite 767

Aufgabe 15.3 von Seite 767

15.6. Homogene Funktionen von zwei Variablen

Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

Aufgabe 1 zu Homogenität

Aufgabe 2 zu Homogenität

Satz von Euler

Aufgabe 1 zu Satz von Euler

Aufgabe 2 zu Satz von Euler

Aufgabe 15.13 von Seite 768

Aufgabe 15.1 von Seite 767

Bestimme in den folgenden Fällen dz/dt , indem Du die Kettenregel verwendest. Überprüfe die Antworten, indem Du zuerst die Ausdrücke für x und y einsetzt und dann differenzierst.

a) $F(x, y) = 6x + y^3$, $x = 2t^2$, $y = 3t^3$ $z(t) = F(x(t), y(t))$

b) $F(x, y) = x^p + y^q$, $x = at$, $y = bt$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dz}{dt} &= F_1'(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F_2'(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= 6 \cdot 4 \cdot t + \frac{3y^2 \cdot 9 \cdot t^2}{2 \cdot 3 \cdot t^2 \cdot t^2} \\ &= 24 \cdot t + \frac{27(3t^3)^2 \cdot t^2}{27 \cdot 3^2 \cdot (t^3)^2 \cdot t^2} \\ &= 24 \cdot t + \frac{27 \cdot 9 \cdot t^{3 \cdot 2} \cdot t^2}{243 \cdot t^8} \\ &= 24 \cdot t + t \end{aligned}$$

$$a) \quad F(x, y) = 6x + \cancel{3}y^3$$

$$x = 2t^2 \quad y = 3t^3$$

$$Z(t) = 6 \cdot 2 \cdot t^2 + \cancel{3} \cdot (3t^3)^3$$

$$= 12 \cdot t^2 + \cancel{3} \cdot 3^3 \cdot (t^3)^3$$

$$= 12 \cdot t^2 + \cancel{3} \cdot 27 \cdot t^{3 \cdot 3}$$

$$= 12t^2 + \cancel{81} \cdot 27 \cdot t^9$$

$$Z'(t) = 24 \cdot t + \cancel{81} \cdot 3 \cdot t^8$$

$$= \underline{24 \cdot t} \checkmark + \cancel{729} \cdot t^8 \checkmark$$

$$b) \quad F(x, y) = x^p + y^q$$

$$x = a \cdot t \quad y = b \cdot t$$

$$\frac{dz}{dt} = F_1' \cdot x' + F_2' \cdot y'$$

$$= p \cdot x^{p-1} \cdot a + q \cdot y^{q-1} \cdot b$$

$$= p(a \cdot t)^{p-1} \cdot a + q(b \cdot t)^{q-1} \cdot b$$

$$= p \cdot \underline{a}^{p-1} \cdot \underline{t}^{p-1} \cdot \underline{a} + q \cdot \underline{b}^{q-1} \cdot \underline{t}^{q-1} \cdot \underline{b}$$

$$= p a^{p-1} \cdot t^{p-1} \cdot a + q b^{q-1} \cdot t^{q-1} \cdot b$$

$$z(t) = (a \cdot t)^p + (b \cdot t)^q = a^p \cdot t^p + b^q \cdot t^q$$

$$z'(t) = p a^{p-1} t^{p-1} \cdot a + q b^{q-1} t^{q-1} \cdot b$$

Aufgabe 15.3 von Seite 767

Finde Ausdrücke für $\partial w / \partial t$ und $\partial w / \partial s$, wenn

$$w = x^2 + y^3 + z^4$$

mit

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 & \frac{\partial y}{\partial t} = 1 & \frac{\partial z}{\partial t} = 5 \\ \frac{\partial x}{\partial s} = 1 & \frac{\partial y}{\partial s} = -1 & \frac{\partial z}{\partial s} = t \end{array}$$
$$x = t + s, \quad y = t - s, \quad z = st.$$

$$w(t, s) = (x(t, s))^2 + (y(t, s))^3 + (z(t, s))^4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= 2 \cdot x(t, s) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_1 + 3 \cdot y(t, s)^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_1 + 4 \cdot z(t, s)^3 \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_5 \\ &= 2 \cdot x + 3y^2 + 4z^3 \cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= 2 \cdot x(t, s) \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial s}}_1 + 3y(t, s)^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial s}}_{-1} + 4 \cdot z(t, s)^3 \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial s}}_t \\ &= 2 \cdot x - 3y^2 + 4z^3 \cdot t \end{aligned}$$

Aufgabe 15.6.1 von Seite 734

Zeige, dass $f(x, y) = x^4 + x^2y^2$ homogen vom Grad 4 ist.

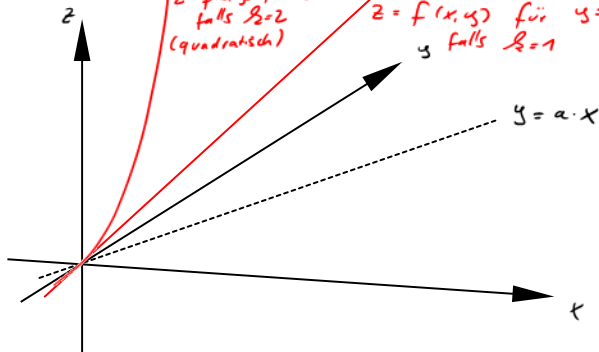
Definition

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist homogen vom Grad h , falls

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = t^h \cdot f(x, y), \quad t \in \mathbb{R}$$

$z = f(x, y)$ für $y = a \cdot x$
falls $h_2 = 2$
(quadratisch)

$z = f(x, y)$ für $y = a \cdot x$
falls $h_2 = 1$



$$f(x, y) = x^4 + x^2 \cdot y^2$$

$$\begin{aligned}
 f(t \cdot x, t \cdot y) &= (t \cdot x)^4 + (t \cdot x)^2 \cdot (t \cdot y)^2 \\
 &= t^4 \cdot x^4 + t^2 \cdot x^2 \cdot t^2 \cdot y^2 \\
 &= t^4 \cdot x^4 + t^2 \cdot t^2 \cdot x^2 \cdot y^2 \\
 &= t^4 \cdot x^4 + t^4 \cdot x^2 \cdot y^2 \\
 &= t^4 \left(\underbrace{x^4 + x^2 \cdot y^2}_{f(x, y)} \right) \\
 &= t^4 \cdot f(x, y)
 \end{aligned}$$

$\rightarrow f$ homogen vom Grad 4.

Aufgabe 1 zu Homogenität

$$a+2 = 4+1 \Rightarrow a=3$$

Bestimme den Wert von a , sodass die Funktion

$$f(x, y) = x^a y^2 + 3x^4 y$$

homogen ist. Gib anschließend den Homogenitätsgrad an.

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= (t \cdot x)^a \cdot (t \cdot y)^2 + 3(t \cdot x)^4 \cdot t \cdot y \\ &= t^a \cdot x^a \cdot t^2 \cdot y^2 + 3 \cdot t^4 \cdot x^4 \cdot t \cdot y \\ &= t^a \cdot t^2 \cdot x^a \cdot y^2 + t^4 \cdot t \cdot 3x^4 \cdot y \\ &= t^{2+a} x^a y^2 + t^5 \cdot 3x^4 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{für } a=3: & \quad = t^5 \underbrace{(x^3 y^2 + 3x^4 y)}_{f(x, y)} \end{aligned}$$

$\rightarrow f$ ist homogen vom Grad 5

Aufgabe 2 zu Homogenität

$$a+3 \stackrel{!}{=} 6 \quad (\Rightarrow) \quad a=3$$

Für welche Werte von a und b ist die Funktion

$$f(x, y) = 2x^a y^3 + 5x^2 y^b$$

$$2+6 \stackrel{!}{=} 6 \quad (\Rightarrow) \quad b=4$$

homogen vom Grad 6?

$$f(x, y) = 2x^3 \cdot y^3 + 5x^2 y^4 \quad \text{ist hom. vom Grad 6.}$$
$$(a=3, b=4)$$

Aufgabe 1 zu Satz von Euler

Sei $f(x, y)$ homogen vom Grad k . Vereinfache folgenden Ausdruck:

$$f_1'(x, y)x + f_2'(x, y)y = k \cdot f(x, y)$$

f hom. vom Grad k : $f(t \cdot x, t \cdot y) = t^k f(x, y)$

$$\frac{d f(\underbrace{t \cdot x}_{\frac{d(t \cdot x)}{dt}}, \underbrace{t \cdot y}_{\frac{d(t \cdot y)}{dt}})}{dt} = f_1'(\underbrace{t \cdot x}_{\frac{d(t \cdot x)}{dt}}, \underbrace{t \cdot y}_{\frac{d(t \cdot y)}{dt}}) \underbrace{x}_{\frac{d(t \cdot x)}{dt}} + f_2'(\underbrace{t \cdot x}_{\frac{d(t \cdot x)}{dt}}, \underbrace{t \cdot y}_{\frac{d(t \cdot y)}{dt}}) \underbrace{y}_{\frac{d(t \cdot y)}{dt}}$$

für $t=1$: $f_1'(x, y) \cdot x + f_2'(x, y) \cdot y$

$$\frac{d(t^k \cdot f(x, y))}{dt} = k t^{k-1} \cdot f(x, y)$$

für $t=1$: $k \cdot f(x, y)$

Aufgabe 2 zu Satz von Euler

$$3 = 2+1 = 1+2$$

Überprüfe die Aussage der letzten Aufgabe für die Funktion

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + xy^2.$$

Gehe dabei wie folgt vor:

1. Bestimme den Homogenitätsgrad von f . $\rightarrow \text{Grad} = 3$
2. Berechne $f'_1(x, y)$ und $f'_2(x, y)$.
3. Zeige, dass gilt:

$$f'_1(x, y)x + f'_2(x, y)y = kf(x, y).$$

$$f'_1 = 3x^2 + 4xy + y^2$$

$$f'_2 = 2x^2 + 2xy$$

3.

$$f(x,y) = x^3 + \underline{2x^2y} + \underline{xy^2}$$

$$f'_1 = 3x^2 + 4xy + y^2$$

$$f'_2 = 2x^2 + 2xy$$

$$f'_1 \cdot x + f'_2 \cdot y$$

$$= (3x^2 + 4xy + y^2) \cdot x + (2x^2 + 2xy) \cdot y$$

$$= 3x^3 + 4\underline{x^2y} + \underline{y^2 \cdot x} + 2\underline{x^2y} + 2\underline{xy^2}$$

$$= 3x^3 + 6\underline{x^2y} + \underline{3xy^2}$$

$$= 3 \underbrace{(x^3 + 2x^2y + xy^2)}_{f(x,y)}$$

↑
{

Aufgabe 15.13 von Seite 768

Bsp. Cobb-Douglas
 $F(K,L) = K^c \cdot L^d$ für $c+d=1$

Nehme an, dass die Produktionsfunktion $F(K,L)$, definiert für $K > 0, L > 0$, homogen vom Grad 1 ist.

Zeige: Wenn $F''_{11} < 0$, d.h. wenn die Grenzproduktivität des Kapitals eine strikt fallende Funktion von K ist, dann ist $F''_{12} > 0$, so dass die Grenzproduktivität des Kapitals eine strikt monoton wachsende Funktion ist, wenn der Arbeitsinput steigt.

F homogen vom Grad 1

$$F(t \cdot K, t \cdot L) = t \cdot F(K, L)$$

$$F'_1(K, L) \cdot K + F'_2(K, L) \cdot L = 1 \cdot F(K, L) \quad \text{Satz v. Euler}$$

↳ Produktregel

$$dK: F''_{11}(K, L) \cdot K + \cancel{F'_1(K, L) \cdot 1} + \underbrace{F''_{21}(K, L) \cdot L}_{= F''_{12}(K, L)} = \cancel{F'_1(K, L)}$$

$$\underbrace{F''_{11}}_{< 0} \cdot \underbrace{K}_{> 0} + \underbrace{F''_{12}}_{> 0} \cdot \underbrace{L}_{> 0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{F''_{12}}_{> 0} \cdot L = - \underbrace{F''_{11}}_{< 0} \cdot K \quad \Leftrightarrow \quad F''_{12} = - \underbrace{\frac{K}{L}}_{> 0} \cdot \underbrace{F''_{11}}_{< 0} > 0$$