

Blatt 9 zu Kapitel 12

$$\# 1 \quad V_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}$$

$$\varepsilon_t \text{ iid mit } E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = 1$$

$$E[V_t] = E\left[\varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}\right]$$

$$= \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}]}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{E[\varepsilon_{t-2}]}_{=0} = 0$$

$$\text{Var}(V_t) = \text{Var}\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}\right)$$

(ε_t iid)

$$= \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_t)}_{=1} + \text{Var}\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$U_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}$$

$$\text{Cor}(U_t, U_{t+1}) = \text{Cor}\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1} - \frac{1}{2} \varepsilon_t + \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}\right)$$

$$= \overbrace{\text{Cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1})}^{=0} + \text{Cor}(\varepsilon_t, -\frac{1}{2} \varepsilon_t) + \overbrace{\text{Cor}(\varepsilon_t, \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1})}^{=0}$$

$$+ \underbrace{\text{Cor}(-\frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + \underbrace{\text{Cor}(-\frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}, -\frac{1}{2} \varepsilon_t)}_{=0} + \text{Cor}(-\frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}, \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1})$$

$$+ \underbrace{\text{Cor}(\frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + \underbrace{\text{Cor}(\frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}, -\frac{1}{2} \varepsilon_t)}_{=0} + \underbrace{\text{Cor}(\frac{1}{2} \varepsilon_{t-2}, \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1})}_{=0}$$

$$= \text{Cor}(\varepsilon_t, -\frac{1}{2} \varepsilon_t) + \text{Cor}(-\frac{1}{2} \varepsilon_{t-1}, \frac{1}{2} \varepsilon_{t-1})$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Cor}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) - \frac{1}{4} \text{Cor}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1})$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_t)}_{=1} - \frac{1}{4} \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_{t-1})}_{=1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Corr}(V_t, V_{t+1}) = \frac{\text{Cov}(V_t, V_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(V_t)} \cdot \sqrt{\text{Var}(V_{t+1})}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

nächste Woche

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_t, V_{t+2}) &= \text{Cov}\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_t\right) \\ &= \text{Cov}\left(\varepsilon_t, \frac{1}{2}\varepsilon_t\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_t)}_{=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Corr}(V_t, V_{t+2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{Cor}(U_t, U_{t+3}) &= \text{Cor}\left(\varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+3} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t+2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t+1}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Corr}(U_t, U_{t+3}) = 0$$

Rechenregeln für Kovarianzen

$$\text{Cor}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$\text{Cor}(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2, b_0 + b_1 Y_1 + b_2 Y_2)$$

$$a_1 b_1 \text{Cor}(X_1, Y_1) + a_2 b_1 \text{Cor}(X_2, Y_1) + a_1 b_2 \text{Cor}(X_1, Y_2) + a_2 b_2 \text{Cor}(X_2, Y_2)$$

$$\text{Cor}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(aX) = \text{Cor}(aX, aX) = a^2 \text{Cor}(X, X) = a^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(aX + bY) = \text{Cor}(aX + bY, aX + bY)$$

$$\begin{aligned} &= a^2 \text{Cor}(X, X) + \underline{a b \text{Cor}(X, Y)} + \underline{b a \text{Cor}(Y, X)} + b^2 \text{Cor}(Y, Y) \\ &= a^2 \text{Var}(X) + 2ab \text{Cor}(X, Y) + b^2 \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$V_t = V_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \quad V_0 = 0$$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = 1$$

$$E[V_1] = E[V_0 + \varepsilon_1] = E[\varepsilon_1] = 0$$

$$E[V_2] = E[V_1 + \varepsilon_2] = \underbrace{E[V_1]}_{=0} + \underbrace{E[\varepsilon_2]}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow E[V_t] = 0 \quad \text{für alle } t$$

$$U_t = U_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad U_0 = 0$$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = 1$$

$$\text{Var}(U_1) = \text{Var}(U_0 + \varepsilon_1) = \text{Var}(\varepsilon_1) = 1$$

$$\text{Var}(U_2) = \text{Var}(U_1 + \varepsilon_2)$$

$$= \underbrace{\text{Var}(U_1)}_{=1} + 2 \underbrace{\text{Cor}(U_1, \varepsilon_2)}_{=0} + \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_2)}_{=1} = 2$$

Vermutung: ✓

$$\text{Var}(U_t) = t$$

$$\text{Var}(U_{t+1}) = \text{Var}(U_t + \varepsilon_{t+1})$$

$$= \underbrace{\text{Var}(U_t)}_{=t} + 2 \underbrace{\text{Cor}(U_t, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + \underbrace{\text{Var}(\varepsilon_{t+1})}_{=1} = t+1$$

$$V_t = V_{t-1} + \varepsilon_t \quad ; \quad V_0 = 0$$

$$\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} E[\varepsilon_t] = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = 1$$

$$\text{Cov}(V_t, V_{t+1}) = \text{Cov}(V_t, V_t + \varepsilon_{t+1}) = \underbrace{\text{Cov}(V_t, V_t)}_{\text{Var}(V_t) = t} + \underbrace{\text{Cov}(V_t, \varepsilon_{t+1})}_{= 0}$$

$$\text{Corr}(V_t, V_{t+1}) = \frac{\text{Cov}(V_t, V_{t+1})}{\sqrt{\text{Var}(V_t)} \sqrt{\text{Var}(V_{t+1})}} = \frac{t}{\sqrt{t} \sqrt{t+1}} = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$$

$$\text{Cov}(V_t, V_{t+2}) = \text{Cov}(V_t, V_{t+1} + \varepsilon_{t+2}) = \underbrace{\text{Cov}(V_t, V_{t+1})}_{= t} + \underbrace{\text{Cov}(V_t, \varepsilon_{t+2})}_{= 0}$$

$$\text{Cov}(V_t, V_{t+h}) = t \quad \text{für alle } h \geq 1$$

$$\text{Corr}(V_t, V_{t+h}) = \dots = \sqrt{\frac{t}{t+h}} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$$

Aufgabe 3

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1916-1984 (T = 69)
Abhängige Variable: cgfr

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	-0,963679	0,467760	-2,060	0,0434 **
cpe	-0,0362021	0,0267737	-1,352	0,1810
cpe_1	-0,0139706	0,0275540	-0,5070	0,6139
cpe_2	0,109990	0,0268797	4,092	0,0001 ***
Mittel abhängige Var.	-0,863768	Stdabw. abhängige Var.	4,307073	
Summe quad. Residuen	968,2000	Stdfehler Regression	3,859454	
R-Quadrat	0,232477	Korrigiertes R-Quadrat	0,197052	
F(3, 65)	6,562656	P-Wert(F)	0,000605	
Log-Likelihood	-189,0327	Akaike-Kriterium	386,0654	

Speichere
Residuen
„uhat1“

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1917-1984 (T = 68)
Abhängige Variable: uhat1

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	0,0180209	0,444252	0,04056	0,9678
uhat1_1	0,291809 ↗ ρ	0,117982	2,473	0,0160 **
Mittel abhängige Var.	0,009358	Stdabw. abhängige Var.	3,800607	
Summe quad. Residuen	885,6966	Stdfehler Regression	3,663283	
R-Quadrat	0,084825	Korrigiertes R-Quadrat	0,070959	
F(1, 66)	6,117342	P-Wert(F)	0,015968	
Log-Likelihood	-183,7613	Akaike-Kriterium	371,5226	
Schwarz-Kriterium	375,9616	Hannan-Quinn-Kriterium	373,2814	
rho	0,002048	Durbins h	0,073041	

$H_0 : \rho = 0$
(keine Autokorrelation)

t-Test :

weise H_0 zurück
mit $\alpha = 5\%$

Breusch - Godfrey - Test

$$\hat{U}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{U}_{t-1} + \alpha_2 CPE_t + \alpha_3 CPE_{t-1} + \alpha_4 CPE_{t-2} + V_t$$

$$H_0: \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$$

globaler F-Test

Modell 3: KQ, benutze die Beobachtungen 1917-1984 (T = 68)

Abhängige Variable: uhat1

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	0,0262151	0,457585	0,05729	0,9545
cpe	-0,00717634	0,0261613	-0,2743	0,7847
cpe_1	0,00157395	0,0267612	0,05881	0,9533
cpe_2	-0,000912491	0,0261017	-0,03496	0,9722
uhat1_1	0,295560	0,121456	2,433	0,0178 **
Mittel abhängige Var.	0,009358	Stdabw. abhängige Var.	3,800607	
Summe quad. Residuen	884,6362	Stdfehler Regression	3,747245	
R-Quadrat	0,085920	Korrigiertes R-Quadrat	0,027884	
F(4, 63)	1,480448	P-Wert(F)	0,218755	

$$F < c \text{ (bei } \alpha = 5\%)$$

⇒ H_0 nicht
verwerfen!

Quasidifferenzierung

$$\tilde{y}_t = y_t - \hat{\rho} y_{t-1} \quad \text{usw} \quad \hat{\rho} = 0.296$$

Modell 4: KQ, benutze die Beobachtungen 1917-1984 (T = 68)
Abhängige Variable: d_tgfr

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	-0,641484	0,452275	-1,418	0,1609
d_tpe	-0,0445625	0,0257924	-1,728	0,0889 *
d_tpe_1	-0,0149105	0,0256706	-0,5808	0,5634
d_tpe_2	0,0987894	0,0258379	3,823	0,0003 ***

Mittel abhängige Var.	-0,595247	Stdabw. abhängige Var.	4,152367
Summe quad. Residuen	882,0712	Stdfehler Regression	3,712461
R-Quadrat	0,236450	Korrigiertes R-Quadrat	0,200659
F(3, 64)	6,606342	P-Wert(F)	0,000586
Log-Likelihood	-183,6218	Akaike-Kriterium	375,2437

speichere
→ Residuen
„uhat4“

Modell 5: KQ, benutze die Beobachtungen 1918-1984 (T = 67)
Abhängige Variable: uhat4

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	0,00667312	0,449989	0,01483	0,9882
uhat4_1	0,0106877 $\tilde{\rho}$	0,124289	0,08599	0,9317

Mittel abhängige Var.	0,006361	Stdabw. abhängige Var.	3,655396
Summe quad. Residuen	881,7866	Stdfehler Regression	3,683198
R-Quadrat	0,000114	Korrigiertes R-Quadrat	-0,015269
F(1, 65)	0,007394	P-Wert(F)	0,931738
Log-Likelihood	-181,4070	Akaike-Kriterium	366,8140
Schwarz-Kriterium	371,2234	Hannan-Quinn-Kriterium	368,5588
rho	0,000757	Durbins h	NA

$H_0: \rho = 0$
nicht verwerfen