Blatt 9 zu Kapitel 12

#1 $V_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$

ε_t iid mit $E[\varepsilon_t] = 0$ $Var(\varepsilon_t) = 1$

$$E[V_t] = E\left[\varepsilon_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$= \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{=0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{E[\varepsilon_{t-1}]}_{=0} + \tfrac{1}{2}\underbrace{E[\varepsilon_{t-2}]}_{=0} = 0$$

$$Var(V_t) = Var\left(\varepsilon_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}\right)$$

(ε_t iid)

$$= \underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{=1} + Var\left(\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2\varepsilon_{t-1}\right) + Var\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\varepsilon_{t-2}\right)$$

$$= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}$$

$$U_t = \varepsilon_t - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$$

$$Cov(U_t, U_{t+1}) = Cov\left(\varepsilon_t - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2},\ \varepsilon_{t+1} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_t + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}\right)$$

$$= \underbrace{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + Cov(\varepsilon_t, -\tfrac{1}{2}\varepsilon_t) + \underbrace{Cov(\varepsilon_t, \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1})}_{=0}$$

$$+ \underbrace{Cov(-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + \underbrace{Cov(-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}, -\tfrac{1}{2}\varepsilon_t)}_{=0} + Cov(-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}, \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1})$$

$$+ \underbrace{Cov(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+1})}_{=0} + \underbrace{Cov(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, -\tfrac{1}{2}\varepsilon_t)}_{=0} + \underbrace{Cov(\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}, \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1})}_{=0}$$

$$= -Cov\left(\varepsilon_t, -\tfrac{1}{2}\varepsilon_t\right) + Cov\left(-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}, \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) - \frac{1}{4}Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1})$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{=1} - \frac{1}{4}\underbrace{Var(\varepsilon_{t-1})}_{=1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$Corr(U_t, U_{t+1}) = \frac{Cov(U_t, U_{t+1})}{\sqrt{Var(U_t)} \cdot \sqrt{Var(U_{t+1})}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$$

nächste Woche

$Cor(U_t, U_{t+2})$