

Optimierung ohne Nebenbedingungen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

17.1 Zwei Variablen: Notwendige Bedingungen

17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

17.4 Lineare Modelle mit quadratischer Zielfunktion

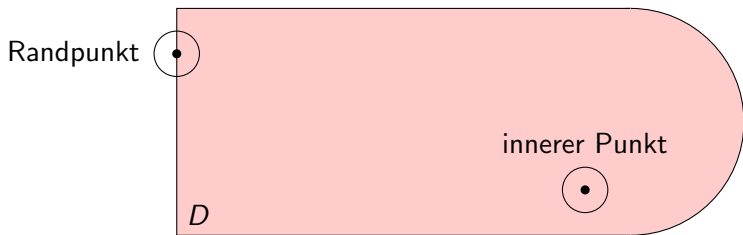
17.5 Der Extremwertsatz

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Definitionen: Innere Punkte & Randpunkte in der Ebene

Um einen **inneren Punkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert ein Kreis, der vollständig in D liegt.

Um einen **Randpunkt** einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert kein Kreis, der vollständig in D liegt.



Notwendige Bedingungen für innere Extremstellen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Die Funktion f kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum in einem inneren Punkt (x_0, y_0) ihres Definitionsbereichs D annehmen, wenn dieser eine **stationäre Stelle** ist – d.h. wenn der Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ die zwei folgenden Gleichungen erfüllt:

$$f'_1(x, y) = 0, \text{ und } f'_2(x, y) = 0$$

Diese werden **Bedingungen erster Ordnung** genannt.

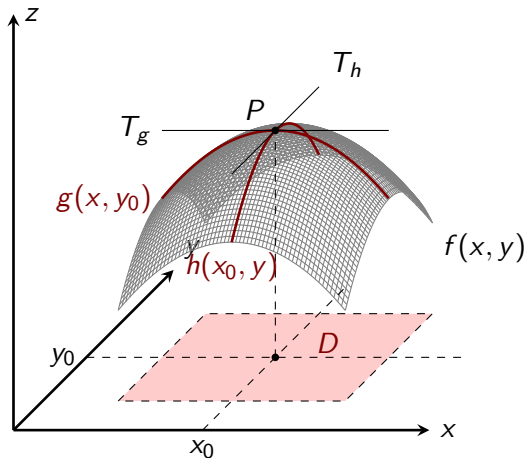
Beispiel 17.1.1

Die Funktion f sei für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$$

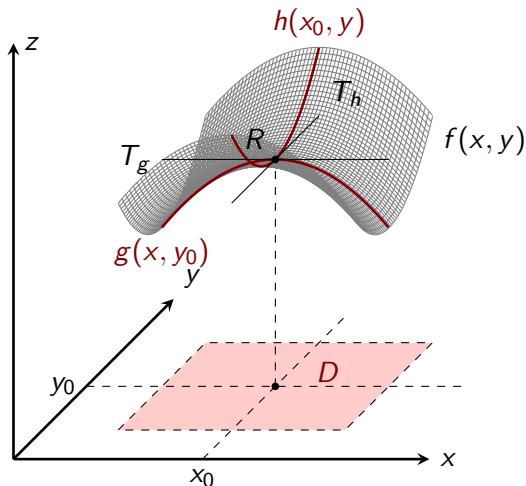
Setze voraus, dass f eine Maximumstelle hat und bestimme diese.

Maximumpunkt P , stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g : $f'_1(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h : $f'_2(x_0, y_0) = 0$

Sattelpunkt R , stationäre Stelle (x_0, y_0)



Steigung von T_g : $f'_1(x_0, y_0) = 0$ Steigung von T_h : $f'_2(x_0, y_0) = 0$

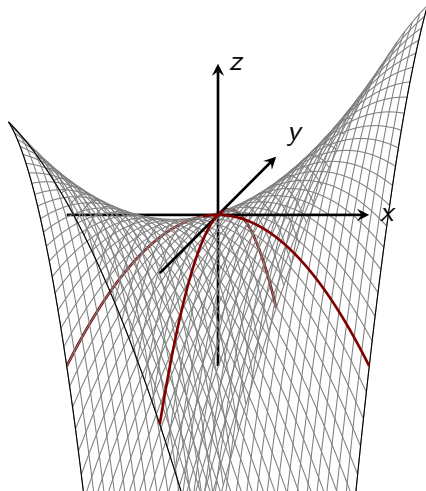
17.2 Zwei Variablen: Hinreichende Bedingungen

Sei die Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Variablen definiert auf einer konvexen Menge D und sei (x_0, y_0) eine **innere stationäre Stelle** in D . Dann gilt:

- a) Falls die Funktion f konkav ist,
ist (x_0, y_0) eine Maximumstelle.
- b) Falls die Funktion f konvex ist,
ist (x_0, y_0) eine Minimumstelle.

Diese Bedingungen sind also identisch zum Fall von Funktionen einer Variablen!

$$f(x, y) = 3xy - x^2 - y^2$$



$f''_{11} = -2$ und $f''_{22} = -2$ sind negativ, f ist aber nicht konkav!

Beispiel 17.1.4 (Gewinnmaximierung)

Die Gewinnfunktion einer Firma sei gegeben durch

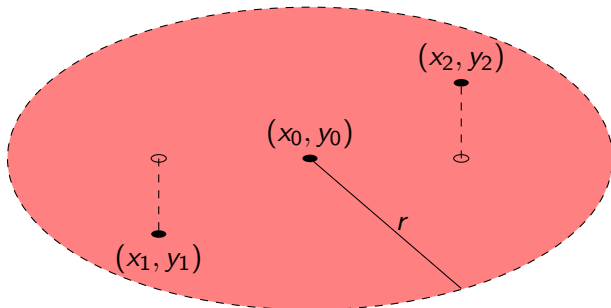
$$\pi(x, y) = 12 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} - 1,2 \cdot x - 0,6 \cdot y$$

Wie lautet das Gewinnmaximum (falls es eines gibt)?

Bestätige, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Sattelstelle

Eine Sattelstelle (x_0, y_0) hat die Eigenschaft, dass es für jede Zahl $r > 0$ zwei Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) in D im Umkreis r von (x_0, y_0) gibt mit $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2)$.



17.4 Beispiel quadratische Zielfunktion: diskriminierende Monopolistin

Die Mensa kann Essen an Studierende (S) und Mitarbeitende (M) zu unterschiedlichen Preisen p_S und p_M verkaufen.

Die Nachfragefunktionen für Mensaessen lauten:

$$D_S(p_S) = \max\{6000 - 1000p_S, 0\}$$

und

$$D_M(p_M) = \max\{1000 - 100p_M, 0\}$$

Pro Essen fallen konstante Stückkosten von 1 an.

Welche Preise p_S^* und p_M^* maximieren den Gewinn der Mensa?

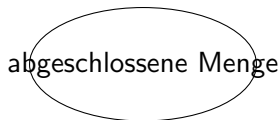
Welcher Preis p^* maximiert den Gewinn der Mensa, falls Preisdiskriminierung verboten ist?

17.5 Extremwertsatz: offene und abgeschlossene Menge

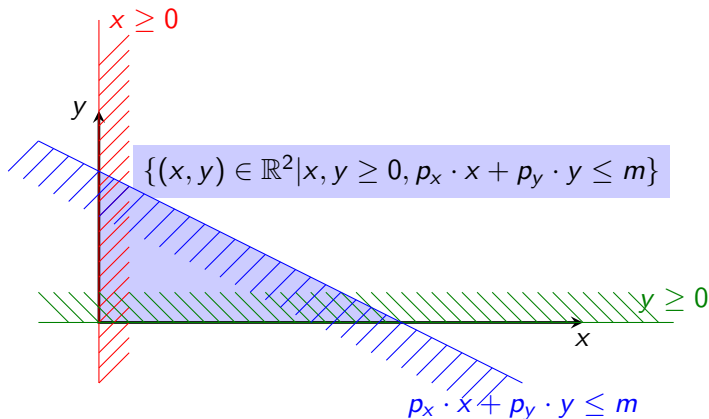
Eine Menge D ist **offen**, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht.



Eine Menge D ist **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.



Beispiel: Budgetmenge



Schwache Ungleichungen:

⇒ Alle Randpunkte sind in der Budgetmenge enthalten.

⇒ Die Budgetmenge ist abgeschlossen.

17.5 Extremwertsatz: beschränkte Menge

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **beschränkt**, falls es einen Kreis mit endlichem Radius $r < \infty$ gibt, der D vollständig enthält.

Beispiel Budgetmenge:

Wähle $r = \max \left\{ \frac{m}{p_x}, \frac{m}{p_y} \right\}$. Der Mittelpunkt des Kreises sei $(0, 0)$.

Eine abgeschlossene und beschränkte Menge heißt **kompakt**.

17.5 Der Extremwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Stelle $(a, b) \in D$, an der f ein Minimum hat und es existiert eine Stelle $(c, d) \in D$, an der f ein Maximum hat:

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \text{ für alle } (x, y) \in D$$

Bemerkung:

Die Bedingungen abgeschlossen und beschränkt an D sind hinreichend für die Existenz von Extremstellen, aber nicht notwendig.

So hat zum Beispiel für $D = \mathbb{R}_{\geq}^2$ die Funktion $f(x, y) = -x - y$ ein Maximum an der Stelle $(0, 0)$, $\mathbb{R}_{\geq}^2$ ist aber nicht beschränkt.

Das Auffinden der Maxima und Minima

Um die Maximum- und Minimumwerte einer differenzierbaren Funktion f , die auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert ist, zu finden, gehe wie folgt vor:

- (i) Bestimme alle stationären Stellen von f im Innern von D .
- (ii) Bestimme den größten und kleinsten Wert von f auf allen Teilstücken des Randes von D und die zugehörigen Stellen.
- (iii) Berechne die Werte der Funktion an allen Stellen, die in (i) und (ii) gefunden wurden. Der größte Funktionswert ist der Maximalwert von f in D . Der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in D .

Ein nützliches Resultat

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

Definiere $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h(x, y) = g(f(x, y))$.

Der Punkt $(x^*, y^*) \in D$ maximiert die Funktion f genau dann, wenn (x^*, y^*) die Funktion h maximiert.

17.7 Komparative Statik und das Envelope-Theorem

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

Für $(x, r) \in D$ bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Für das Optimierungsproblem

$$\max_x f(x, r)$$

bezeichne $x^*(r)$ den Wert x , welcher f bei gegebenem Parameter r maximiert.

Definiere die **Optimalwertfunktion**

$$f^*(r) := f(x^*(r), r)$$

Beispiel: Gewinnmaximierung

Outputmenge $x \geq 0$, Preis r , Kosten $C(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \pi(x, r) = rx - x^2$$

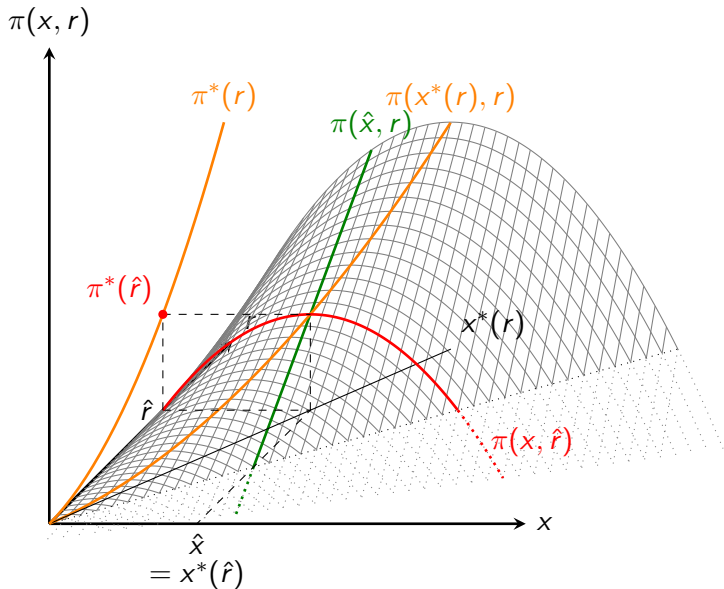
Bedingung erster Ordnung für x :

$$\pi'_1(x, r) = r - 2x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^*(r) = \frac{r}{2}$$

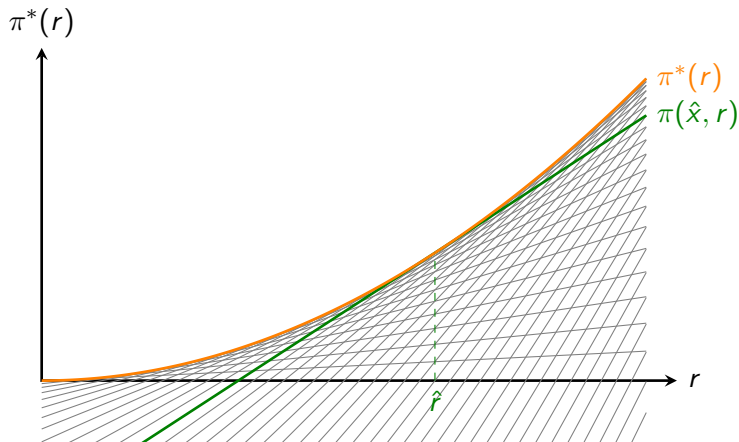
Optimalwertfunktion:

$$\pi^*(r) = \pi(x^*(r), r) = r \frac{r}{2} - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



Beispiel: Gewinnmaximierung – die „Umhüllende“ $\pi^*(r)$



An der Stelle $\hat{r}$ sind $\pi^*(r)$ und $\pi(\hat{x}, r)$ tangential!

Envelope-Theorem

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Es bezeichne x eine Variable und r einen Parameter.

Sei $x^*(r)$ der Wert von x , der $f(x, r)$ für r maximiert und sei $(x^*(r), r)$ ein innerer Punkt von D . Für $f^*(r) := f(x^*(r), r)$ gilt dann:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Beweis:

$$\frac{df^*(r)}{dr} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} \frac{dx^*(r)}{dr} + \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r}$$

Da $x^*(r)$ der Wert von x ist, welcher $f(x, r)$ maximiert, gilt $\frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial x} = 0$.

Anwendung Envelope-Theorem auf Beispiel

$$\pi(x, r) = rx - x^2$$

Optimale Menge $x^*(r)$ bei gegebenem Preis r :

$$x^*(r) = \frac{r}{2}$$

Optimalwertfunktion

$$\pi^*(r) = \frac{r^2}{4}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial \pi(x, r)}{\partial r} = x$$

und

$$\frac{d\pi^*(r)}{dr} = \frac{r}{2}$$

Zusammenfassung

- ▶ Notwendige Bedingung: stationäre Stelle
- ▶ Hinreichende Bedingung für stationäre Stellen:
Funktion konkav $\Rightarrow$ Maximum
Funktion konvex $\Rightarrow$ Minimum
- ▶ Beispiel: Gewinnmaximierung
- ▶ Extremwertsatz
offene/abgeschlossene und beschränkte Mengen
- ▶ Envelope-Theorem
Variablen, Parameter & Optimalwertfunktion