

Klausuraufgaben und andere Aufgaben zu Kapitel 15 „Partielle Ableitungen im Einsatz“

15.1 Haupttermin 2025	2
15.2 Nachtermin 2025	3
15.3 Haupttermin 2024	4
15.4 Haupttermin 2024	5
15.5 Nachtermin 2024	6
15.6 Haupttermin 2023	7
15.7 Haupttermin 2022	8
15.8 Aufgabe 15.8 von Seite 767	9
15.9 Aufgabe 15.9 von Seite 767	10
15.10 Klassifizieren der Lösungsmenge eines LGS	11
15.11 Implizites Differenzieren eines Gleichungssystems	12
15.12 Marktmodell mit zwei Gütern	13

Diese Aufgaben werden in Tutorien 11 & 12 besprochen.

15.1 Haupttermin 2025

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 7x - 7y + 127, \text{ für } x, y \in \mathbb{R}$$

Welche Steigung y' hat eine Höhenlinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$?

- a) $y' = 1$
- b) $y' = -2$
- c) $y' = 3$
- d) Die Steigung der Höhenlinie kann an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ nicht berechnet werden.

15.2 Nachtermin 2025

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + y$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) Die Funktion f ist nicht homogen.
- b) Die Funktion f ist homogen vom Grad 1.
- c) Die Funktion f ist homogen vom Grad 2.
- d) Die Funktion f ist homogen vom Grad x^2 für $x \in \mathbb{R}$.

15.3 Haupttermin 2024

Es sei $||\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = ||\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}||$ homogen und falls ja von welchem Grad?

- a) f ist homogen vom Grad 2.
- b) f ist homogen vom Grad 1.
- c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{2}$.
- d) f ist nicht homogen.

15.4 Haupttermin 2024

Bestimmen Sie die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der Höhenlinie der Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x, y) = (2, 3)$ mit

$$f(x, y) = \sqrt{x \cdot y^2}$$

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$

b) $\frac{dy}{dx} = -3$

c) $\frac{dy}{dx} = -1$

d) $\frac{dy}{dx} = -2$

15.5 Nachtermin 2024

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x, y) = (x - 5)^2 - (y - 7)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Welche der folgenden Gleichungen in den Variablen x , y und z beschreibt die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (5, 7)$?

- a) $z = 0$
- b) $z = 10 \cdot (x - 5) - 14(y - 7)$
- c) $z = 10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$
- d) $z = -10 \cdot (x - 5) + 14(y - 7)$

15.6 Haupttermin 2023

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei der Gradient im Punkt $(x_0, y_0) = (4, -4)$ gegeben durch

$$D_f(x_0, y_0) = (2, 2)$$

Welche der folgenden Gleichungen kann eine Höhenlinie der Funktion f durch den Punkt (x_0, y_0) beschreiben?

a) $(x - 3)^2 - (y + 5)^2 = 0$

b) $2(x - 3)(y + 5) = -2$

c) $x^2/y^2 = 1$

d) $2(x + y) = 0$

15.7 Haupttermin 2022

Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(p, r, w) = 8 \frac{p^3 r^5}{w^7} ,$$

wobei für $p, r, w > 0$ gilt.

Zu welchem Grad ist die Funktion F homogen?

- a) F ist homogen vom Grad 1.
- b) F ist homogen vom Grad 7.
- c) F ist homogen vom Grad 3.
- d) F ist nicht homogen.

15.8 Aufgabe 15.8 von Seite 767

Bestimme die GRS¹ von y bzgl. x für:

a) $U(x, y) = 2x^{0,4}y^{0,6}$

b) $U(x, y) = xy + y$

c) $U(x, y) = 10(x^{-2} + y^{-2})^{-4}$

¹Gemeint ist die Grenzrate der Substitution, also die Steigung dy/dx einer Höhenlinie.

15.9 Aufgabe 15.9 von Seite 767

Bestimme den Grad der Homogenität, wenn es sie gibt, für jede der folgenden Funktionen.

a) $f(x, y) = 3x^3y^{-4} + 2xy^{-2}$

b) $Y(K, L) = (K^a + L^a)^{2c}e^{K^2/L^2}$

c) $f(x_1, x_2) = 6x_1^4 + 6x_1x_2^3$

d) $F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$

15.10 Klassifizieren der Lösungsmenge eines LGS

Untersuche das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + ay + z &= 1 \\x + y + bz &= a\end{aligned}$$

1. Bestimme die erweiterte Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ und berechne $\det(\mathbf{A})$.
2. Bestimme in Abhängigkeit von a und b , wann
 - das System **genau eine Lösung**,
 - **unendlich viele Lösungen**, oder
 - **keine Lösung** besitzt.
3. Begründe deine Klassifikation mithilfe von Rang von Koeffizienten- und erweiterter Matrix.

15.11 Implizites Differenzieren eines Gleichungssystems

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 14 \\x + y + z &= 6\end{aligned}$$

Bestimme $y'(x)$ und $z'(x)$

15.12 Marktmodell mit zwei Gütern

In einem Markt mit zwei Gütern seien die Gleichgewichtsmengen q_1 und q_2 vom Einkommen I abhängig. Angebot und Nachfrage führen zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}q_1^2 + q_2^2 + I &= 16 \\ q_1 q_2 + I q_1 &= 15\end{aligned}$$

Dabei seien $q_1 = q_1(I)$ und $q_2 = q_2(I)$ differenzierbare Funktionen des Einkommens I .

Bestimme $q_1'(I)$ und $q_2'(I)$.

Angenommen, beim Einkommen $I = 3$ gilt

$$(q_1, q_2) = (3, 2).$$

Bestimme $q_1'(3)$ und $q_2'(3)$.