

Funktionen mehrerer Variablen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in diesen Übungen:

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

14.3 Geometrische Darstellung

Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

Aufgabe 14.3.8 von Seite 665

Aufgabe zu Höhenlinien

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Aufgabe zu perfekten Substituten

Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y$$

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

- Bestimme $f(-1,2)$, $f(a,a)$ und $f(a+h,b) - f(a,b)$.
- Zeige, dass $f(2x,2y) = 2^2 f(x,y)$ und dass $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ für alle t .

$$a) f(-1,2) = (-1+2)^2 = 1^2 = 1$$

$$f(a,a) = (a+a)^2 = (2a)^2 = 4a^2$$

$$f(a+h,b) - f(a,b) = \left(\underbrace{a+h}_x + \underbrace{b}_y\right)^2 - (a+b)^2$$

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{2ah + h^2 + 2hb}{h} = \frac{(a+h)^2 + 2(a+h)b + \cancel{b^2} - (a^2 + 2ab + \cancel{b^2})}{h}$$

$$= 2a + h + 2b = 2ah + h^2 + 2hb$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a + 2b$$

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$
ist homogen vom Grad k , falls:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot f(x, y) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{für } f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= (t \cdot x)^2 + 2 \cdot t \cdot x \cdot t \cdot y + (t \cdot y)^2 \\ &= t^2 \cdot x^2 + t^2 \cdot 2xy + t^2 \cdot y^2 \\ &= t^2 (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= t^2 \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

→ f ist homogen vom Grad 2

Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

Untersuche die Definitionsbereiche der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen und zeichne diese dann in der xy -Ebene.

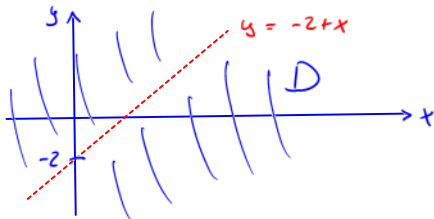
a) $\frac{x^2+y^3}{y-x+2}$

b) $\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

c) $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$

a) Der Nenner $y - x + 2$ darf nicht = null sein!

$$y - x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -2 + x$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -2 + x\}$$

$$b) \underbrace{2 - (x^2 + y^2)}_{\geq 0}$$

$$\text{Falls } 2 - (x^2 + y^2) < 0$$

→ Funktion nicht definiert

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 - (x^2 + y^2) \geq 0 \}$$

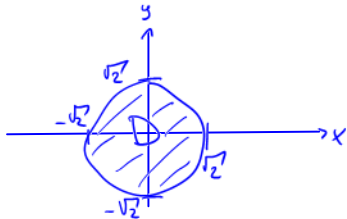
$$2 - (x^2 + y^2) \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2 \geq x^2 + y^2$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x^2 + y^2 \leq 2 \quad \rightarrow \text{Radius } \sqrt{2} \text{ \& \; Mittelpunkt } (0, 0)$$

Kreisgleichung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Kreis mit Radius r
& Mittelpunkt (a, b)



$$c) \underbrace{\sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}}_{\geq 0}$$

Erlaubt: $4 > x^2 + y^2$

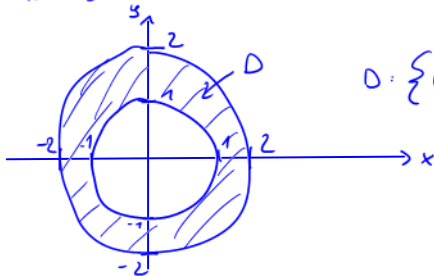
$$4 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 1$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 \geq 0$$

$$\begin{array}{l} 4 - x^2 - y^2 < 0 \\ 4 < x^2 + y^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \quad \text{nicht möglich}$$

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Kreis mit Radius 2
Mittelpunkt (0,0)



$$D: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1) \geq 0 \right\}$$

Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von:

a) $z = 3x + 4y = \underline{(3, 4)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $z = x^3 y^2$

c) $z = x^5 - 3x^2 y + y^6$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$ $\nabla = \underline{(3, 4)}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \cdot y^2$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cdot 2y = 2x^3 \cdot y$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 5x^4 - 6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6y^5$$

Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für jede der folgenden Funktionen:

a) $z = x^2 + e^{2y}$

b) $z = y \ln(x)$

c) $z = xy^2 - e^{xy}$

d) $z = x^y$

$$x^y = e^{y \cdot \ln(x)} = e^{y \cdot \ln(x)}$$
$$\frac{\partial e^{y \cdot \ln(x)}}{\partial y} = e^{y \cdot \ln(x)} \cdot \ln(x)$$

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2y} \cdot 2$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x)$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - e^{xy} \cdot y$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y - e^{xy} \cdot x$

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln(x)$

$$a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2y} \cdot 2$$

$$(e^{2y})' = e^{2y} \cdot 2$$

$$z''_{11} = 2$$

$$z''_{12} = \underline{0}$$

$$z''_{21} = \underline{0}$$

$$z''_{22} = e^{2y} \cdot 4$$

$$z'' = \begin{pmatrix} \underbrace{2}_{>0} & 0 \\ 0 & \underbrace{e^{2y} \cdot 4}_{>0} \end{pmatrix}$$

Hesse matrix

z konkav / konvex?

$$|z''| = 2 \cdot e^{2y} \cdot 4 > 0$$

z ist strikt konvex

$$b) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x) \\ = y \cdot x^{-1}$$

$$z''_{11} = y \cdot (-1) x^{-2} \quad z''_{12} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}} \\ = -\frac{y}{x^2}$$

$$z''_{21} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

$$z''_{22} = 0$$

$$z'' = \begin{pmatrix} \underbrace{-\frac{y}{x^2}}_{\substack{< 0 & y > 0 \\ > 0 & y < 0}} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|z''| = -\frac{y}{x^2} \cdot 0 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} < 0$$

z ist weder konkav noch konvex

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - e^{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y - e^{xy} \cdot x$$

Produktregel

$$z''_{11} = -e^{xy} \cdot y^2$$

$$z''_{12} = 2y - \left(\frac{\partial e^{xy}}{\partial y} \cdot y + e^{xy} \cdot 1 \right)$$

$$= 2y - \left(e^{xy} \cdot x \cdot y + e^{xy} \right)$$

$$= \underline{2y - e^{xy}(xy + 1)}$$

Produktregel

$$z''_{21} = 2y - \left(\frac{\partial e^{xy}}{\partial x} \cdot x + e^{xy} \cdot 1 \right)$$

$$= 2y - \left(e^{xy} \cdot y \cdot x + e^{xy} \right)$$

$$= \underline{2y - e^{xy}(xy + 1)}$$

$$z''_{22} = 2x - e^{xy} \cdot x^2$$

$$z'' = \begin{pmatrix} -e^{xy} y^2 & 2y - e^{xy}(xy + 1) \\ 2y - e^{xy}(xy + 1) & 2x - e^{xy} \cdot x^2 \end{pmatrix}$$

$$d) \frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln(x)$$

$$x^{y-1} = e^{\ln(x^{y-1})} \\ = e^{(y-1) \ln(x)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = e^{\underbrace{(y-1) \ln(x)}_{x^{y-1}}} \cdot \ln(x)$$

$$z''_{11} = (y-1) \cdot y \cdot x^{y-2}$$

Produktregel

$$z''_{12} = 1 \cdot x^{y-1} + y \cdot \frac{\partial x}{\partial y} x^{y-1}$$

$$= x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x) \\ = x^{y-1} (1 + y \ln(x))$$

$$z''_{21} = y x^{y-1} \cdot \ln(x) + x^y \cdot \frac{1}{x}$$

$$= y x^{y-1} \cdot \ln(x) + \underbrace{x^y \cdot x^{-1}}_{= x^{y-1}}$$

$$z''_{22} = x^y \cdot (\ln(x))^2$$

$$z'' = \begin{pmatrix} (y-1)y x^{y-2} & x^{y-1} (1 + y \ln(x)) \\ x^{y-1} (1 + y \ln(x)) & x^y (\ln(x))^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

Zeichne für die folgenden Funktionen eine Reihe von Höhenlinien in ein x - y -Diagramm:

▶ $z = 3 - x - y$

▶ $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

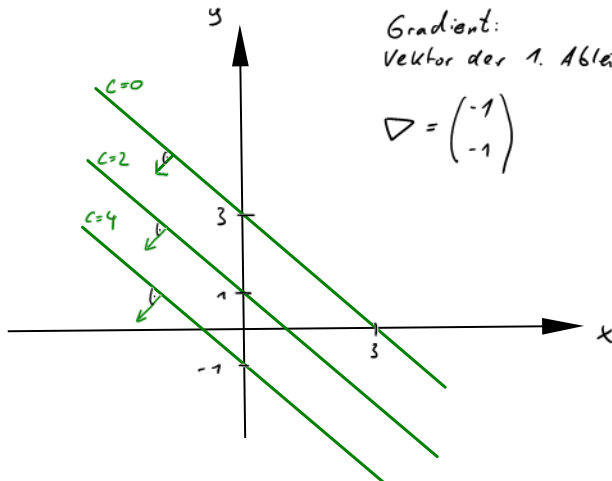
$$z = 3 - x - y = C \quad \text{"Höhe der Höhenlinie"}$$

$$C=) \quad -3 + x + y = -C \quad \text{Steigung: } -1$$

$$C=) \quad y = \underbrace{3 - C}_{\text{Achsenabschnitt}} - x$$

Gradient:
Vektor der 1. Ableitungen

$$\nabla = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

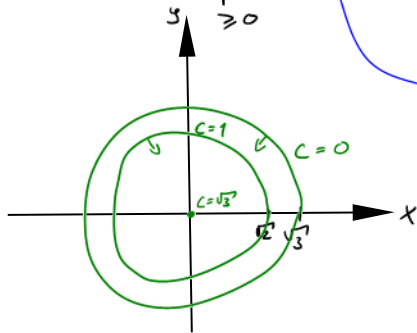


$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} = c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - x^2 - y^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow -3 + x^2 + y^2 = -c^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \underbrace{3 - c^2}_{\substack{r^2 \\ \geq 0}}$$



$$z'_1 = \frac{1}{2\sqrt{3-x^2-y^2}} (-2x)$$

$$= -\frac{x}{z}$$

$$z'_2 = -\frac{y}{z}$$

$$\text{für } c^2 \leq 3 \quad c \leq \sqrt{3}$$

Allgemein:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Mittelpunkt (a, b)

Radius r

Aufgabe 14.3.8 von Seite 665

Nehme an, dass $F(x, y)$ eine Funktion ist, von der wir nur wissen, dass

- i) $F(0, 0) = 0$
- ii) $F'_1(x, y) \geq 2$ für alle (x, y)
- iii) $F'_2(x, y) \leq 1$ für alle (x, y)

Was kann über die relativen Größen von $F(0, 0)$, $F(1, 0)$, $F(2, 0)$, $F(0, 1)$ und $F(1, 1)$ gesagt werden?

Schreibe alle Ungleichungen auf, die zwischen diesen Zahlen gelten müssen.

Aufgabe zu Höhenlinien

Es seien die Nutzenfunktionen u und v durch

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

und

$$v(x, y) = \ln(x) + 2 \ln(y)$$

gegeben, wobei $x, y > 0$.

Begründe, warum diese beiden Funktionen das gleiche System von Höhenlinien haben: Wenn zwei Paare (x_0, y_0) und (x_1, y_1) auf der gleichen Höhenlinie von u liegen, dann müssen sie auch auf der gleichen Höhenlinie von v liegen (und umgekehrt).

Im Allgemeinen gilt, falls $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend, dann haben $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und v mit $v(x, y) = g(u(x, y))$ die gleichen Höhenlinien.

$$U(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}} = c \quad | (\cdot)^3$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{1}{3} \cdot 3} \cdot y^{\frac{2}{3} \cdot 3}$$

$$= x y^2 = c^3 \quad | :x \text{ (für } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow y^2 = c^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{c^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$y = c^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$V(x, y) = \ln(x) + 2 \ln(y) = d$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln(y) = d - \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \frac{d - \ln(x)}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\frac{d - \ln(x)}{2}} = e^{(d - \ln(x)) \cdot \frac{1}{2}}$$

Wenn gilt:

$$e^{\frac{d}{2}} = c^{\frac{2}{3}} \quad | (\cdot)^{\frac{3}{2}}$$

$$e^{\frac{d}{2} \cdot \frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow c = e^{\frac{d}{3}}$$

Für jedes d gibt es
ein eindeutiges c , sodass
die Höhenlinien
identisch sind.

$$y = e^{\frac{d}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(e^{d - \ln(x)} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{d - \ln(x)}} \\ &= \sqrt{e^d \cdot e^{-\ln(x)}} = \sqrt{e^d \cdot \frac{1}{e^{\ln(x)}}} \\ &= \sqrt{e^d \cdot \frac{1}{x}} = \underbrace{\sqrt{e^d}}_{e^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Von } V = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

$$y = c^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Für welche Werte der Konstante a ist die folgende Funktion konkav / konvex?

$$f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$$

$$f'_1 = -12x + (2a+4)y$$

$$f'_2 = (2a+4)x - 2y + 4a$$

$$f'' = \begin{pmatrix} \underbrace{-12}_{<0} & 2a+4 \\ 2a+4 & \underbrace{-2}_{<0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |f''| &= (-12) \cdot (-2) - (2a+4)^2 \\ &= 24 - (2a+4)^2 \end{aligned}$$

f ist (strikt) konkav, falls $24 - (2a+4)^2 \geq (>) 0$

$$\Leftrightarrow 24 \geq (2a+4)^2 \Leftrightarrow \underbrace{-\sqrt{24}}_{4 \cdot 6} \leq 2a+4 \leq \underbrace{\sqrt{24}}_{4 \cdot 6} \Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq a+2 \leq \sqrt{6}$$

$$\boxed{-\sqrt{6}-2 \leq a \leq \sqrt{6}-2}$$

hier ist f schwach konkav.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

zweimal differenzierbar

Hessematrix $f'' = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix}$

Konvex: $f''_{11}, f''_{22} \geq 0$ $|f''| \geq 0 \Leftrightarrow f''_{11} \cdot f''_{22} - f''_{12} \cdot f''_{21} \geq 0$

strikt konvex: $f''_{11}, f''_{22} > 0$ $|f''| > 0$

Konkav: $f''_{11}, f''_{22} \leq 0$ $|f''| \geq 0$

strikt konkav: $f''_{11}, f''_{22} < 0$ $|f''| > 0$

Falls $|f''| < 0 \rightarrow$ weder Konkav noch Konvex

Aufgabe zu perfekten Substituten

Ein Nutzenfunktion für perfekte Substitute laute

$$u(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$$

mit $a, b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

$$u'_1 = a \quad u'_2 = b$$

$$u'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|u''| = 0 \geq 0$$

u ist konkav und konvex

Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Eine quasilineare Nutzenfunktion laute

$$u(x, y) = v(x) + b \cdot y$$

mit $v' > 0$, $v'' < 0$ und $b > 0$.

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

$$u'_1 = v'(x) \quad u'_2 = b$$

$$u'' = \begin{pmatrix} \underbrace{v''(x)}_{<0} & 0 \\ 0 & \underbrace{0}_{\leq 0} \end{pmatrix} \quad |u''| = 0 \geq 0$$

u ist konkav.