

# Funktionen mehrerer Variablen



Moodle



Lehrbuch

---

<sup>1</sup>Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

# Diese Aufgaben bearbeiten wir in diesen Übungen:

## 14.1 Funktionen von zwei Variablen

Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

## 14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

## 14.3 Geometrische Darstellung

Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

Aufgabe 14.3.8 von Seite 665

Aufgabe zu Höhenlinien

## 14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Aufgabe zu perfekten Substituten

Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

## Aufgabe 14.1.4 von Seite 650

Gegeben sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ .

- a) Bestimme  $f(-1, 2)$ ,  $f(a, a)$  und  $f(a + h, b) - f(a, b)$ .
- b) Zeige, dass  $f(2x, 2y) = 2^2 f(x, y)$  und dass  $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$  für alle  $t$ .

## Aufgabe 14.1.6 von Seite 650

Untersuche die Definitionsbereiche der durch die folgenden Formeln gegebenen Funktionen und zeichne diese dann in der  $xy$ -Ebene.

a)  $\frac{x^2+y^3}{y-x+2}$

b)  $\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

c)  $\sqrt{(4 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1)}$

## Aufgabe 14.2.4 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von:

a)  $z = 3x + 4y$

b)  $z = x^3y^2$

c)  $z = x^5 - 3x^2y + y^6$

## Aufgabe 14.2.5 von Seite 656

Bestimme alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für jede der folgenden Funktionen:

a)  $z = x^2 + e^{2y}$

b)  $z = y \ln(x)$

c)  $z = xy^2 - e^{xy}$

d)  $z = x^y$

## Aufgabe 14.3.5 von Seite 664

Zeichne für die folgenden Funktionen eine Reihe von Höhenlinien in ein  $x$ - $y$ -Diagramm:

▶  $z = 3 - x - y$

▶  $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

## Aufgabe 14.3.8 von Seite 665

Nehme an, dass  $F(x, y)$  eine Funktion ist, von der wir nur wissen, dass

- i)  $F(0, 0) = 0$
- ii)  $F'_1(x, y) \geq 2$  für alle  $(x, y)$
- iii)  $F'_2(x, y) \leq 1$  für alle  $(x, y)$

Was kann über die relativen Größen von  $F(0, 0)$ ,  $F(1, 0)$ ,  $F(2, 0)$ ,  $F(0, 1)$  und  $F(1, 1)$  gesagt werden?

Schreibe alle Ungleichungen auf, die zwischen diesen Zahlen gelten müssen.



# Aufgabe zu Höhenlinien

Es seien die Nutzenfunktionen  $u$  und  $v$  durch

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

und

$$v(x, y) = \ln(x) + 2 \ln(y)$$

gegeben, wobei  $x, y > 0$ .

Begründe, warum diese beiden Funktionen das gleiche System von Höhenlinien haben: Wenn zwei Paare  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  auf der gleichen Höhenlinie von  $u$  liegen, dann müssen sie auch auf der gleichen Höhenlinie von  $v$  liegen (und umgekehrt).

Im Allgemeinen gilt, falls  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton steigend, dann haben  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v$  mit  $v(x, y) = g(u(x, y))$  die gleichen Höhenlinien.

## Aufgabe 14.8.2 von Seite 694

Für welche Werte der Konstante  $a$  ist die folgende Funktion konkav / konvex?

$$f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$$

# Aufgabe zu perfekten Substituten

Ein Nutzenfunktion für perfekte Substitute laute

$$u(x, y) = a \cdot x + b \cdot y$$

mit  $a, b > 0$ .

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?

# Aufgabe zu einer quasilinearen Nutzenfunktion

Eine quasilineare Nutzenfunktion laute

$$u(x, y) = v(x) + b \cdot y$$

mit  $v' > 0$ ,  $v'' < 0$  und  $b > 0$ .

Ist die Nutzenfunktion konkav oder konvex?