

Partielle Ableitungen im Einsatz



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

15.1 Eine einfache Kettenregel

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

15.8 Lineare Approximation

15.9 Differentiale

15.10 Gleichungssysteme

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

15.1 Eine einfache Kettenregel

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t)$ und $y = h(t)$ ist, dann gilt

$$\frac{dz}{dt} = f'_1(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_2(x, y) \frac{dy}{dt}$$

Diese Ableitung heißt die **totale Ableitung** von z bezüglich t .

Beispiel

Alfreds Nutzen aus dem Konsum von Pasta ($x > 0$) und Parmesan ($y > 0$) sei gegeben durch:

$$u(x, y) = 2 \ln(x) + \ln(y)$$

Die Menge von Pasta x und Parmesan y hängt von Alfreds Einkommen $m > 0$ ab:

$$x(m) = \frac{2}{3} \cdot m \qquad y(m) = \frac{1}{3} \cdot m$$

Bestimme $\frac{du}{dm}$!

15.2 Kettenregel für zwei Variablen

Wenn $z = f(x, y)$ mit $x = g(t, s)$ und $y = h(t, s)$, dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f'_1(x, y) \frac{\partial x}{\partial t} + f'_2(x, y) \frac{\partial y}{\partial t}$$

und

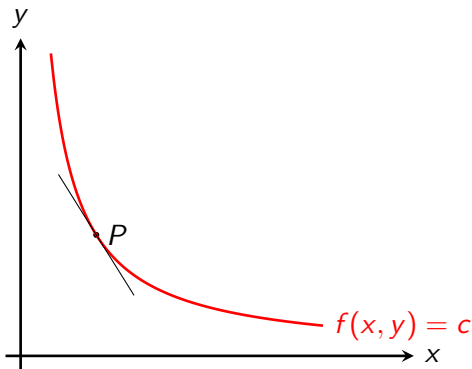
$$\frac{\partial z}{\partial s} = f'_1(x, y) \frac{\partial x}{\partial s} + f'_2(x, y) \frac{\partial y}{\partial s}$$

15.3 Implizites Differenzieren entlang einer Höhenlinie

Wenn f differenzierbar, $f(x, y) = c$ und $f'_2(x, y) \neq 0$, dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1(x, y)}{f'_2(x, y)}$$

„Satz von der impliziten Funktion“



15.6 Homogene Funktionen von zwei Variablen

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y heißt **homogen vom Grad k** , wenn

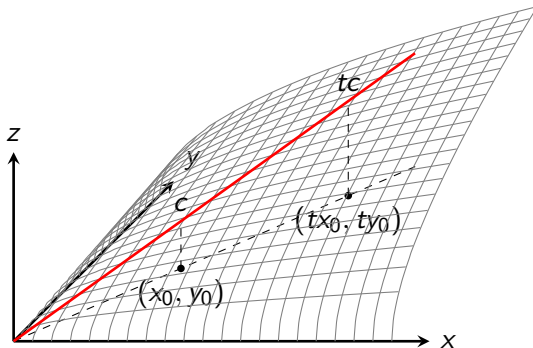
$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)$$

für alle $t > 0$ und für alle x, y .

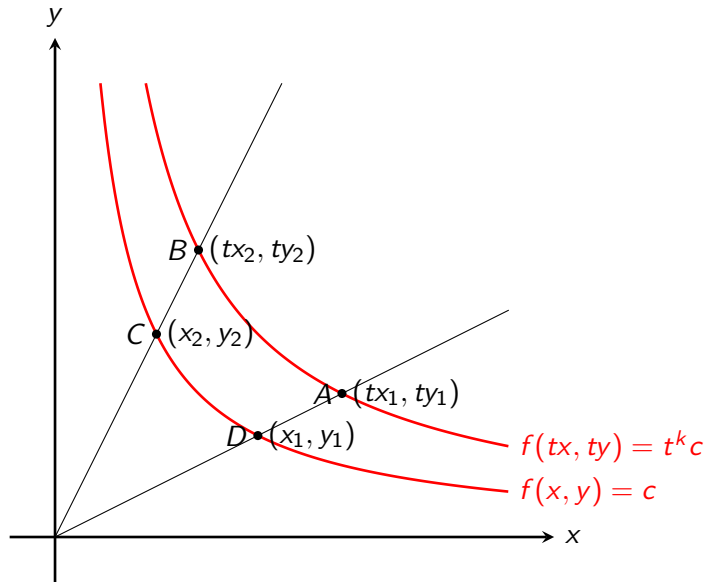
Die Multiplikation beider Variablen mit einem positiven Faktor t wird den Wert der Funktion mit dem Faktor t^k multiplizieren.

Geometrische Aspekte homogener Funktionen

Sei $f(x, y)$ homogen vom Grad $k = 1$.



Höhenlinien für eine homogene Funktion



15.8 Lineare Approximation

Wiederholung: Funktionen einer Variablen

Die lineare Approximation von $f(x)$ um (x_0) ist

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

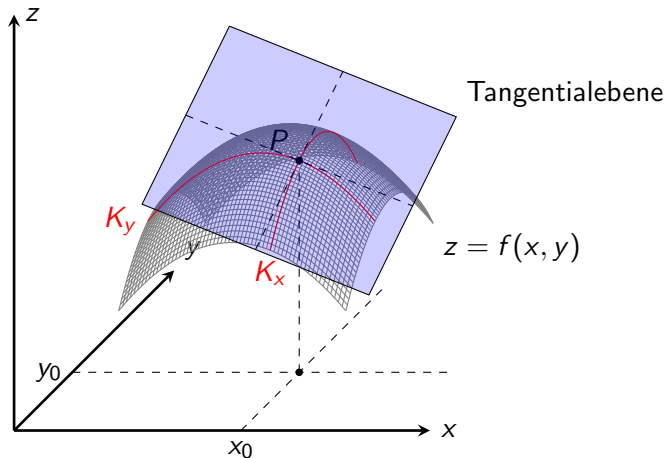
Die lineare Approximation von $f(x, y)$ um (x_0, y_0) ist

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Die Tangentialebene

Im Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ hat die Tangentialebene an den Graphen von $z = f(x, y)$ die Gleichung

$$z - z_0 = f'_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$



15.9 Differentiale und Zuwächse

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Seien $dx, dy \in \mathbb{R}$.

Das **Differential** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y) :

$$dz \text{ oder } df = f'_1(x, y)dx + f'_2(x, y)dy$$

Der **Zuwachs** von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x, y) :

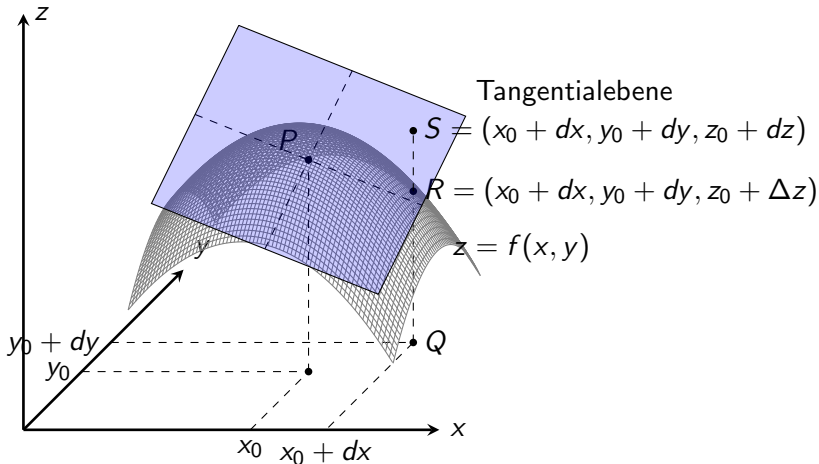
$$\Delta z = f(x + dx, y + dy) - f(x, y)$$

Falls $|dx|$ und $|dy|$ klein:

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f'_1(x, y)dx + f'_2(x, y)dy \Leftrightarrow \Delta z \approx dz$$

Das Differential dz und der Zuwachs Δz

$$S_z = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0} + \underbrace{f'_1(x_0, y_0)dx + f'_2(x_0, y_0)dy}_{dz}$$



Funktionen mit mehreren Funktionswerten

Sei $f : D \rightarrow R$

mit

Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und
Wertebereich $R \subseteq \mathbb{R}^m$.

Die Funktion ordnet jedem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ zu.

Beispiel:

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Lineare Funktionen mit mehreren Funktionswerten

Eine Funktion $f : D \rightarrow R$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $R \subseteq \mathbb{R}^m$ ist **linear**, falls

- ▶ f homogen: $f(t \cdot \mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x})$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- ▶ f additiv: $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.

Insbesondere können wir eine lineare Funktion anhand einer Matrix **A** der Ordnung $m \times n$ darstellen:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

linear?

Wie lautet die Matrix **A**?

Ableitungen von Funktionen mit mehreren Variablen

Die Funktion $f : D \rightarrow R$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $R \subseteq \mathbb{R}^m$ hat für jeden ihrer m Funktionswerte einen Gradienten.

Wir ordnen alle m Gradienten als Zeilenvektoren einer Matrix, der **Jacobimatrix $\mathbf{J}$** .

Der Eintrag J_{ij} der Jacobimatrix ist demnach die Ableitung des i -ten Funktionswertes nach der j -ten Variable.

Für $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ gilt:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}$$

Ableitungen von quadratischen Formen

Zur Wiederholung: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine quadratische Form, falls es eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ gibt, sodass

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Der Gradient der quadratischen Form lautet:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}' + \mathbf{A})\mathbf{x}$$

Die Hessematrix der quadratischen Form lautet:

$$f''(\mathbf{x}) = \mathbf{A}' + \mathbf{A}$$

15.10 Gleichungssysteme: Freiheitsgrade

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ seien $n \in \mathbb{N}$ Variablen.

Wenn es keine Restriktion an diese Variablen gibt, so gibt es n **Freiheitsgrade**.

Müssen diese Variablen eine Gleichung der Form

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

erfüllen, so gibt es noch $n - 1$ Freiheitsgrade.

Für jede weitere „unabhängige“ Restriktion wird die Anzahl der Freiheitsgrade um 1 reduziert.

k Variablen mit n Restriktionen

k Variablen erfüllen ein System von n „unabhängigen“ Restriktionen, falls:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

Falls $k > n$, so verbleiben $k - n$ Freiheitsgrade.

Strukturelle Form eines Modells

Für ein ökonomisches Modell sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Variablen und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor der Parameter.

Das Modell sei durch n Gleichungen mit $n + m$ Variablen definiert:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = 0$$

Dieses Modell heißt auch **strukturelle Form**.

In Kurzform schreiben wir:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

Freiheitsgrade und Unabhängige Restriktionen

Ein System von n Restriktionen ist **unabhängig**, falls keine der n Restriktionen durch die anderen $n - 1$ Restriktionen impliziert wird.

Ein System von Gleichungen mit $n + m$ Variablen hat m **Freiheitsgrade**, wenn es eine Menge von m Variablen gibt, die frei gewählt werden können, während die restlichen n Variablen eindeutig bestimmt sind, sobald den m freien Variablen spezielle Werte zugeordnet wurden.

Endogene und exogene Variablen

In der Notation des ökonomischen Modells sind $a_1, \dots, a_m$ **exogen**, d.h. Parameter die in das ökonomische Modell einfließen und

es sind $x_1, \dots, x_n$ **endogen**, d.h. Größen, die vom ökonomischen Modell erklärt werden.

Reduzierte Form eines Modells

Die n **strukturellen Gleichungen** des ökonomischen Modells

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

haben genau eine Lösung $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, falls alle Gleichungen unabhängig sind.

Diese Lösung heißt **reduzierte Form** des Modells.

15.11 Differenzieren von Gleichungssystemen

Komparative Statik:

Gesucht ist die Jacobimatrix $\mathbf{J}^*$ der reduzierten Form $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$

Die Antwort ist leicht, falls das strukturelle Modell

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

linear ist: $\rightarrow$ reduzierte Form ist Lösung von LGS.

Ist das strukturelle Modell aber zu komplex, kann die reduzierte Form oftmals nur schwer oder überhaupt nicht angegeben werden.

In diesem Fall können die Ableitungen aber dennoch durch implizites Differenzieren bestimmt werden.

Implizites Differenzieren von Gleichungssystemen

Annahme: Die Funktion f des Gleichungssystems

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$$

sei differenzierbar.

Die Jacobimatrix von f lautet

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial a_m} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{J}_x} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{J}_a}$

Sie besteht aus den beiden Teilmatrizen $\mathbf{J}_x$ und $\mathbf{J}_a$.

Implizites Differenzieren von Gleichungssystemen

Die reduzierte Form $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ ist **implizit** durch die strukturelle Form **definiert**:

$$f(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Die i -te Modellgleichung:

$$f_i(x_1^*(\mathbf{a}), \dots, x_n^*(\mathbf{a}), \mathbf{a}) = 0$$

Ableitung der i -ten Modellgleichung nach dem j -ten Parameter a_j :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial a_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n^*}{\partial a_j} + \frac{\partial f_i}{\partial a_j} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial a_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial a_j} \end{pmatrix} = - \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$$

Implizites Differenzieren von Gleichungssystemen

Ableitungen aller Modellgleichungen nach dem j -ten Parameter a_j :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial a_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial a_j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_j} \end{pmatrix}$$

Ableitungen aller Modellgleichungen nach allen Parametern $a_1, \dots, a_m$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_x} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial a_m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}^*} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial a_m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_a}$$

Implizites Differenzieren von Gleichungssystemen

In Matrixnotation gilt also:

$$\mathbf{J}_x \mathbf{J}^* = -\mathbf{J}_a$$

Die gesuchte Jacobimatrix $\mathbf{J}^*$ der reduzierten Form $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ ist also Teil eines linearen Gleichungssystems.

Wenn $\mathbf{J}_x$ invertierbar ist, dann gilt:

$$\mathbf{J}^* = -\mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_a$$

Dies ist eine verallgemeinerte Anwendung des Satzes über implizite Funktionen.

Zur Bestimmung von $\mathbf{J}^*$ muss also die Lösung $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$ nicht bekannt sein! Wir benötigen lediglich die Ableitungen der Modellgleichungen nach allen Variablen und Parametern.

Beispiel Marktgleichgewicht mit Mengensteuer

Variablen:

- ▶ Menge q
- ▶ Preis p

Parameter: Mengensteuer t

Modellgleichungen:

$$S(p) = q = D(p + t)$$

Gleichgewicht: $q^*(t), p^*(t)$

Gesucht: $\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} \frac{dq^*(t)}{dt} \\ \frac{dp^*(t)}{dt} \end{pmatrix}$

Strukturelles Modell

$$\begin{aligned}q - S(p) &= 0 \\ S(p) - D(p + t) &= 0\end{aligned}$$

Jacobimatrix $\mathbf{J}_x$ für die Variablen q und p :

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 1 & -S'(p) \\ 0 & S'(p) - D'(p + t) \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{J}_x| = S'(p) - D'(p + t) > 0$$

Inverse Jacobimatrix:

$$\mathbf{J}_x^{-1} = \frac{1}{S'(p) - D'(p + t)} \begin{pmatrix} S'(p) - D'(p + t) & S'(p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix $\mathbf{J}_a$ für den Parameter t :

$$\mathbf{J}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -D'(p + t) \end{pmatrix}$$

Jacobimatrix $\mathbf{J}^*$

Mit $\mathbf{J}^* = -\mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_a$ gilt dann:

$$\mathbf{J}^* = -\frac{1}{S'(p) - D'(p+t)} \begin{pmatrix} S'(p) - D'(p+t) & S'(p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -D'(p+t) \end{pmatrix}$$

Also

$$\mathbf{J}^* = \left(\frac{S'(p)D'(p+t)}{S'(p) - D'(p+t)}, \frac{D'(p+t)}{S'(p) - D'(p+t)} \right)$$

Marktgleichgewicht mit Mengensteuer

Ökonomische Interpretation:

$$\frac{q^*(t)}{dt} = \frac{D'(p+t)S'(p)}{S'(p) - D'(p+t)} < 0$$

Die Gleichgewichtsmenge sinkt.

$$\frac{p^*(t)}{dt} = \frac{D'(p+t)}{S'(p) - D'(p+t)} < 0$$

Der von den Anbietern erzielte Preis sinkt.

Aber:

$$\frac{p^*(t) + t}{dt} = \frac{D'(p+t)}{S'(p) - D'(p+t)} + 1 = \frac{S'(p+t)}{S'(p) - D'(p+t)} > 0$$

Der von den Nachfragern zu bezahlende Preis steigt.

Zusammenfassung

- ▶ Totale Ableitung
- ▶ Implizites Differenzieren
- ▶ Homogenität, konstante Skalenerträge
- ▶ Lineare Approximation
- ▶ Differentiale und Zuwächse
- ▶ Komparative Statik mit Gleichungssystemen