

Determinanten, Inverse und quadratische Formen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Aufgabe 13.1.1

Aufgabe 13.1.3

13.2 Determinanten der Ordnung 3×3

Aufgabe 13.2.1

13.6 Die Inverse einer Matrix

Aufgabe 13.6.3

Rangkriterium

Aufgabe 12.8.2

Aufgabe 13.1.1

Berechne folgende Determinanten:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

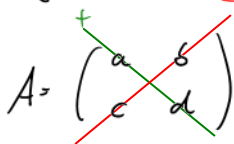
$$b) \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$$

Allgemein


$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| = +a \cdot d - b \cdot c$$

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 18$$

b)

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 8 & -x \end{vmatrix} = (2-x) \cdot (-x) - 8 \cdot 1$$

$$= \underbrace{1-2x+x^2}_{\substack{(1-x)^2 \\ \geq 0}} - \underbrace{8-1}_{-9} = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 1-x = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow 1-x_1 = -3 \quad \text{oder} \quad 1-x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4 = x_1 \quad \text{oder} \quad -2 = x_2$$

$$d) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2$$

$$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - (\cancel{a^2} - 2ab + \cancel{b^2})$$

$$= 4ab = 0 \Leftrightarrow a=0 \text{ oder } b=0$$

$$e) \begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix} = \underbrace{3^t}_{3^{t-1} \cdot 3} \cdot 2^{t-1} - \underbrace{2^t}_{2^{t-1} \cdot 2} \cdot 3^{t-1}$$

$$= 3 \cdot \underline{3^{t-1}} \cdot \underline{2^{t-1}} - 2 \cdot \underline{2^{t-1}} \cdot \underline{3^{t-1}}$$

$$= (3-2) 3^{t-1} \cdot 2^{t-1}$$

$$= \cancel{3^{t-1} \cdot 2^{t-1}} = 6^{t-1}$$

Aufgabe 13.1.3

Verwende die Cramer'sche Regel, um die folgenden Gleichungssysteme nach x und y aufzulösen. Überprüfe die Antworten durch Einsetzen.

$$\begin{array}{lcl} a) & 3x - y & = 8 \\ & x - 2y & = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} b) & x + 3y & = 1 \\ & 3x - 2y & = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} c) & ax - by & = 1 \\ & bx + ay & = 2 \end{array}$$

$$Ax = b$$

~~6~~ Cramer'sche Regel:

1. $|A| \neq 0$ (falls $|A| = 0$, ~~keine Lösung~~
Cramer'sche Regel
ist nicht anwendbar)

2. Ersetze j -te Spalte von A durch $b \leadsto A_j b$

$$|A_j b|$$

$$3. \quad x_j^* = \frac{|A_j b|}{|A|}$$

$$a) \quad \begin{array}{rcl} 3x & -y & = 8 \\ x & -2y & = 5 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad |A| = 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \\ = -6 + 1 = -5 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$A_1 b = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad |A_1 b| = 8 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 \\ = -16 + 5 = -11$$

$$\leadsto x^* = +\frac{11}{5}$$

$$A_2 b = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad |A_2 b| = 3 \cdot 5 - 8 \cdot 1 = 7$$

$$\leadsto y^* = -\frac{7}{5}$$

$$\frac{11}{5} - 2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{11}{5} + \frac{14}{5}$$

Probe

$$3 \cdot \left(+\frac{11}{5}\right) + \frac{7}{5} = +\frac{33}{5} + \frac{7}{5} = +\frac{40}{5} = +8 \quad \checkmark$$

$$= \frac{25}{5} = 5 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} 6) \quad x + 3y &= 1 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 - 9 = -11 \neq 0$$

$$A_1 b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \quad |A_1 b| = -2 - 3 \cdot 14 = -2 - 42 = -44$$

$$\leadsto x^* = \frac{|A_1 b|}{|A|} = \frac{-44}{-11} = 4$$

$$A_2 b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} = 14 - 3 = 11$$

$$\leadsto y^* = \frac{11}{-11} = -1$$

Probe

$$4 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = 12 + 2 = 14 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} (c) \quad ax - by &= 1 \\ 6x + ay &= 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 6 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a \cdot a - (-b) \cdot 6 = a^2 + b^2 \neq 0, \text{ falls } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0$$

$$A_1 b = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 2 & a \end{pmatrix} \quad |A_1 b| = a - (-b) \cdot 2 = a + 2b$$

$$\leadsto x^* = \frac{a + 2b}{a^2 + b^2}$$

$$A_2 b = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \quad |A_2 b| = a \cdot 2 - 1 \cdot b = 2a - b$$

$$\leadsto y^* = \frac{2a - b}{a^2 + b^2}$$

Probe

$$a \cdot \frac{a + 2b}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{2a - b}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + \cancel{2ab} - \cancel{2ab} + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \quad \checkmark$$

$$b \cdot \frac{a + 2b}{a^2 + b^2} + a \cdot \frac{2a - b}{a^2 + b^2} = \frac{\cancel{ab} + 2b^2 + 2a^2 - \cancel{ab}}{a^2 + b^2} = 2 \quad \checkmark$$

Aufgabe 13.2.1

Verwende die Regel von Sarrus, um die Determinanten der folgenden Matrizen zu berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Regel von Sarrus

a	b	c	a	b
d	e	f	d	e
g	h	i	g	h

$$\det = \underline{a \cdot e \cdot i} + \underline{b f g} + \underline{c d h} \\ - \underline{g e c} - \underline{h f a} - \underline{i d b}$$

A

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array}$$

$$\det(A) = -1 \cdot 2 \cdot 1 = -2$$

(Diagonalen mit Nullen weglassen)

C

$$\begin{array}{ccccc}
 a & b & c & a & b \\
 0 & d & e & 0 & d \\
 0 & 0 & f & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\det(C) = a \cdot d \cdot f$$

(Diagonalen mit Nullen weglassen)

D

$$\begin{array}{ccccc}
 a & 0 & b & a & 0 \\
 0 & e & 0 & 0 & e \\
 c & 0 & d & c & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \det(D) &= a e d \\
 &\quad - c e b \\
 &= e(ad - cb)
 \end{aligned}$$

Alternative Lösungswege

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Minuszeichen
wegen Tausch



$\leadsto$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Minuszeichen
weil Dreieck falsch rum

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$\leadsto$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\leadsto$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Entwicklung mit Ko-Faktoren

1. suche 2. Zeile aus (mit zwei Nullen)

$$\det(D) = -0 \cdot |D_{21}| + e |D_{22}| - 0 |D_{23}|$$

$$D_{22} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |D_{22}| = \overbrace{a \cdot d - b \cdot c}^{\uparrow}$$

$$\det(D) = e(ad - bc)$$

Aufgabe 13.6.3

Löse folgende Gleichungssysteme, indem Du die Koeffizientenmatrix invertierst.

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & 2x & - \quad 3y = 3 \\ & 3x & - \quad 4y = 5 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{b)} & 2x & - \quad 3y = 8 \\ & 3x & - \quad 4y = 11 \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{c)} & 2x & - \quad 3y = 0 \\ & 3x & - \quad 4y = 0 \end{array}$$

$$Ax = b$$

$$x = Ix = \underbrace{A^{-1}A}_{=I} x = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} \cdot b$$

$$a) \quad \begin{array}{rcl} 2x & - & 3y = 3 \\ 3x & - & 4y = 5 \end{array}$$

Probe

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 9 - 4 = 5 \quad \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 3 = -8 + 9 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \\ -3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 2 \times 2 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \end{matrix}$

b) A wie bei a)

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 8 + 3 \cdot 11 \\ -3 \cdot 8 + 2 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 + 33 \\ -24 + 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c)

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x \cdot 1. \text{ Spalte} + y \cdot 2. \text{ Spalte} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alternative Lösung Gauß'sche Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{array} \quad \cdot 2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 1 \cdot x & + & 0 \cdot y = 3 \\ 0 \cdot x & + & 1 \cdot y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 + \frac{9}{2} & 5 - \frac{9}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \underbrace{-4 + \frac{9}{2}}_{\frac{1}{2}} & \underbrace{5 - \frac{9}{2}}_{\frac{1}{2}} \end{array} \quad \cdot 2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \leftarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \cdot \frac{3}{2}$$

Berechnung der Inversen Matrix mit Gauß

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} :2 \\ :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \cdot \frac{3}{2} \\ \cdot \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} = A^{-1}$$

Aufgabe 12.8.2

Nutze Gauß'sche Elimination um die erweiterte Koeffizientenmatrix in Treppenstufenform zu bringen. Welche Fallunterscheidungen sind in Bezug auf die Lösungsmenge für a und b zu treffen?

$$x + y - z = 1$$

$$x - y + 2z = 2$$

$$x + 2y + az = b$$

Nutze nun das Rangkriterium um in Abhängigkeit von a und b zu bestimmen ob und wenn ja, wie viele Lösungen das System hat.

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & b \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & 2 & 2 \\
 1 & 2 & a & b
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \cdot (-1) \cdot (-1) \\
 \leftarrow \\
 \leftarrow
 \end{array}$$

führender Eintrag = 1 ✓

$$\begin{array}{cccc}
 \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 \\
 0 & \textcircled{-2} & 3 & 1 \\
 0 & 1 & 1+a & b-1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{führender Eintrag} \\
 : (-2) \\
 \text{Nullen ✓}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & \textcircled{1} & 1+a & b-1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{führender Eintrag} = 1 \\
 \cdot (-1) \\
 \text{≠ 0}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & \underbrace{1+a - (-\frac{3}{2})}_{\frac{5}{2}+a} & \underbrace{b-1 - (-\frac{1}{2})}_{b-\frac{1}{2}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \text{erlangt von } A & 1 & 1 & -1 \\
 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\
 & 0 & 0 & \frac{5}{2}+a
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{erlangt von} \\
 \text{rechter Seite} \\
 1 \\
 -\frac{1}{2} \\
 b-\frac{1}{2}
 \end{array}$$

3 Treppenschufen

$$\Rightarrow \text{rk}(A) = \underline{3}$$

$$\text{und } \text{rk}(A|b) = 3$$

Es gibt eine Lösung

A hat 3 Zeilen.

* Es gibt genau eine Lösung falls $a \neq -\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{l}
 \# \text{ Zeilen} = \text{rk}(A) \\
 = \text{rk}(A|b) \quad *
 \end{array}$$

A andere Fälle



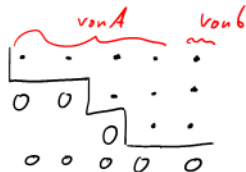
$$\text{rk}(A) = 3$$

$$\text{rk}(A|b) = 4$$

⇒ keine Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & & \frac{5}{2}a & 6 - \frac{1}{2} \\ \hline & & \stackrel{!}{=} 0 & \neq 0 \end{array}$$

$a = -\frac{5}{2}, 6 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Lösung



$$\text{rk}(A) = 3 < \# \text{ Zeilen}$$

$$\text{rk}(A|b) = 3$$

⇒ unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline & 0 & \frac{5}{2}a & 6 - \frac{1}{2} \\ \hline & & \stackrel{!}{=} 0 & \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

$a = -\frac{5}{2}, 6 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & \frac{5}{2} + a & 6 - \frac{1}{2}
 \end{array}
 \quad : \left(\frac{5}{2} + a \right)$$

(nur möglich, falls $a \neq -\frac{5}{2}$)

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 1 & \underbrace{\frac{(6 - \frac{1}{2}) \cdot 2}{(\frac{5}{2} + a) \cdot 2}}_{\frac{26-1}{5+2a}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 0 & 1 + \frac{26-1}{5+2a} = \frac{5+2a+26-1}{5+2a} = \frac{4+2a+26}{5+2a} = 2 \frac{2+a+6}{5+2a} \\
 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{26-1}{5+2a} = \frac{-5-2a}{2(5+2a)} + \frac{66-3}{2(5+2a)} = \frac{-8-2a+66}{2(5+2a)} = \frac{-4-a+36}{5+2a} \\
 0 & 0 & 1 & \frac{26-1}{5+2a}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 2 \frac{2+a+6}{5+2a} - \frac{-4-a+36}{5+2a} \\
 0 & 1 & 0 & \frac{-4-a+36}{5+2a} \\
 0 & 0 & 1 & \frac{26-1}{5+2a}
 \end{array}$$

$$x = \frac{8+3a-6}{5+2a}$$

$$y = \frac{-4-a+36}{5+2a}$$

$$z = \frac{26-1}{5+2a}$$

eindeutige Lösung
falls $a \neq -\frac{5}{2}$

Fall: $a = -\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} + a & 6 - \frac{1}{2} \\ & & = 0 & \end{array}$$

Interpretation:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 6 - \frac{1}{2}$$

Gleichung kann nur erfüllt sein,
falls $\underline{\delta = \frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \bigcirc & \bigcirc \end{array}$$

Interpretation:

$$x + y - z = 1$$

$$y - \frac{3}{2}z = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z$$

$$1. \text{ Zeile: } x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z - z = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z$$

$$a = -\frac{5}{2}, \quad \delta \neq \frac{1}{2}$$

→ keine Lösung

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix}$$