

Kapitel GLS:

Das verallgemeinerte Regressionsmodell



Moodle



Lehrbuch

Das klären wir in diesem Kapitel:

Verletzung von MLR 5: Konsequenzen für OLS-Schätzer

GLS: Generalized Least Squares

FGLS: Feasible Generalized Least Squares

Klassisches Regressionsmodell (OLS)

$$MLR\ 1: \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

$$MLR\ 3: \quad rk(\mathbf{X}) = K + 1$$

$$MLR\ 4: \quad E[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$$

$$MLR\ 5: \quad \Sigma(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{Var}(u_i) = \sigma^2 \quad i=1, \dots, n \\ \rightarrow \text{Cov}(u_i, u_t) = 0 \quad i \neq t \end{array}$$

MLR 5 definiert klassische (homoskedastische und seriell unkorrelierte) Fehlerterme.

Verallgemeinertes Regressionsmodell (GLS)

MLR 1, 3 & 4 wie OLS und

$$MLR\ 5': \quad \Sigma(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$$

wobei $\boldsymbol{\Omega}$ eine positiv definit symmetrische (pds) $n \times n$ - Matrix ist.

$\Omega_{n \times n}$ ist positiv semi definit

$$v' \Omega v \geq 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n$$

Ω ist positiv definit

$$v' \Omega v > 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$$

Ω ist symmetrisch, falls $\Omega' = \Omega$

$$\Phi(u) = E[(u - \underbrace{E[u]}_{=0})(u - \underbrace{E[u]}_{=0})']$$

$$= E[u \cdot u']$$

$$\Phi(u)' = (E[u \cdot u'])' = E[(u \cdot u')']$$

$$= E[u'' \cdot u'] = E[u \cdot u']$$

$$= \Phi(u)$$

symmetrie ✓

$$\begin{aligned}
 v' \sigma(v) v &= v' E[v \cdot v'] \cdot v \\
 &= E[\underbrace{v' \cdot v}_{\substack{\text{GIR} \\ = x}} \cdot \underbrace{v' \cdot v}_{\substack{\text{GIR} \\ = x}}] \\
 &= E[\underbrace{x^2}_{\geq 0}] \geq 0 \quad \text{pos. sem. def.} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

GLS

neue Annahme: $\sigma(v|x) = \sigma^2 \cdot \Omega$

MLR 5' $\Omega_{n \times n}$ pos. def. symmetrisch

Eigenschaften positiv definiter Matrizen

Sei die $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ positiv definit symmetrisch (pds), d.h. es gelte $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$.

Dann hat $\mathbf{A}$ vollen Rang und es existiert die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$, welche ebenfalls pds ist.

Für $\mathbf{A}$ existiert eine eindeutige pds Matrix $\mathbf{Z}$, sodass $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}$.

Da $\mathbf{A}^{-1}$ ebenfalls pds ist, existiert auch eine pds Matrix $\mathbf{P}$, sodass:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{P}$$

Es gilt dann $\mathbf{P} = \mathbf{Z}^{-1}$.

Diagonalisierung von pds - Matrizen

Spektral Theorem

$$A_{n \times n}^{\text{pds}} = Q \cdot \Lambda \cdot Q'$$

Λ : Diagonalmatrix
Elemente auf Diagonalen Eigenwerte

$A_{\text{pds}} \Rightarrow \text{Eigenwerte} > 0$

Q : Orthonormale der Eigenvektoren

$$A^{\frac{1}{2}} = Q \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot Q'$$

$$\begin{aligned}
 A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}} &= Q \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{Q' \cdot Q}_I \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot Q' \\
 &= Q \underbrace{\Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}}}_\Lambda \cdot Q' \\
 &= Q \Lambda Q' = A
 \end{aligned}$$

Spezialfälle

Bevor wir das zentrale Resultat, das

Gauß-Markov-Aitken-Theorem

für allgemeine pds-Matrizen Ω besprechen, widmen wir uns zwei *Spezialfällen*:

- ▶ heteroskedastische und seriell unkorrelierte Störterme
- ▶ homoskedastische und seriell korrelierte Störterme

Spezialfall: $\mathbf{u}$ heteroskedastisch, seriell unkorreliert

Die Störterme sind seriell unkorreliert ($\text{Cov}(u_i, u_j) = 0 \ \forall \ i \neq j$), die Varianzen variieren aber über die Beobachtungen ($\text{Var}(u_i) = \sigma_i^2$).

Wir schreiben dann

$$\mathbb{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Omega}} = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$$

mit $\sigma > 0$ und $\sigma_i > 0 \ \forall \ i = 1, \dots, n$

Dieser Fall ist häufig in Querschnittsmodellen.

Heteroskedastische & unkorrelierte Störterme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$$

Spezialfall heteroskedastisch, seriell unkorreliert

Inverse von $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

Zerlegung von $\mathbf{\Omega}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma^2}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma}{\sigma_n} \end{pmatrix}}_{\sqrt{\mathbf{\Omega}^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma}{\sigma_n} \end{pmatrix}}_{\sqrt{\mathbf{\Omega}^{-1}}}$$

Spezialfall homoskedastisch, seriell korreliert

Die Störterme haben identische Varianzen, sind aber untereinander korreliert:

$$\text{Var}(u_i|\mathbf{X}) = \sigma^2 > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \& \quad \text{Cov}(u_s, u_t|\mathbf{X}) \neq 0 \quad \text{für } s \neq t$$

$$\Sigma(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \text{Cov}(u_1, u_2|\mathbf{X}) & \dots & \text{Cov}(u_1, u_n|\mathbf{X}) \\ \text{Cov}(u_2, u_1|\mathbf{X}) & \sigma^2 & \dots & \text{Cov}(u_2, u_n|\mathbf{X}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(u_n, u_1|\mathbf{X}) & \text{Cov}(u_n, u_2|\mathbf{X}) & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\Omega}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(u_i, u_j|\mathbf{x})}{\underbrace{\sqrt{\text{Var}(u_i|\mathbf{X})} \sqrt{\text{Var}(u_j|\mathbf{X})}}_{\sigma^2}}$$

Dieser Fall ist häufig in Zeitreihendaten.

Verletzung von MLR 5: Konsequenzen für OLS-Schätzer

Verletzung von MLR 5: Konsequenzen für OLS-Schätzer

Welche Konsequenzen hat die Verallgemeinerung von MLR 5:

$\mathbb{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ durch

$$MLR\ 5' : \mathbb{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$$

auf die OLS-Schätzer?

Wir schätzen den Parametervektor β zunächst mit OLS:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} && \text{(mit MLR 3)} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) && \text{(mit MLR 1)} \\ &= \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

Mit MLR 4 $E[\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ gilt:

$$E[\hat{\beta}|\mathbf{X}] = E[\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{0} \checkmark$$

Der OLS-Schätzer ist also nach wie vor erwartungstreu!

$$(X'X)^{-1} X' \underbrace{(X\beta + u)}_{\text{MLR1: } u}$$

$$= \underbrace{(X'X)^{-1} X'X}_{\text{I}} \beta + (X'X)^{-1} X' u$$

$$= \text{I} \cdot \beta + (X'X)^{-1} X' u$$

$$= \beta + (X'X)^{-1} X' u$$

Konsequenzen für OLS

Für die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\hat{\beta}$ gilt aber: $(\)'$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\beta}|\mathbf{X}) &= \cancel{\mathbb{V}(\beta)} + \mathbb{V}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}|\mathbf{X}) \\ &= \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}_{\sigma^2 \cdot \mathbf{X}} \underbrace{\mathbb{V}(\mathbf{u}|\mathbf{X})}_{\sigma^2 \cdot \mathbf{I}} \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}_{\mathbf{I}} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{\Omega} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned}$$

Die übliche OLS-Varianz-Kovarianz-Matrix $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ist also für $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{I}$ nicht mehr die korrekte Varianz-Kovarianz-Matrix der geschätzten Koeffizienten.

$\mathbb{V}(\hat{\beta}|\mathbf{X})$ unter MLR 5

Konsequenzen für OLS

Es gelte *MLR 5'* : $\mathbb{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2\mathbf{\Omega}$ mit $\mathbf{\Omega}$ pds.

- ▶ man kann mit OLS die Parameter unverzerrt schätzen,
- ▶ aber OLS ist im Allgemeinen nicht mehr der BLUE (es gibt Schätzer mit geringerer Varianz),
- ▶ und die OLS - Kovarianzmatrix ist keine gute Schätzung der tatsächlichen Kovarianzmatrix, daher sind darauf basierende Standardfehler, *t*-Tests und *F*-Tests falsch.

Fazit: OLS liefert unverzerrte Parameter und falsche Standardfehler und Tests. Ob man also OLS anwenden sollte, hängt von der Anwendung ab (ist man an Tests interessiert oder nur an Parametern?)

GLS: Generalized Least Squares

GLS: Generalized Least Squares

MLR 5!

Angenommen, die Matrix Ω in $\mathbb{E}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \sigma^2\Omega$ wäre bekannt und positiv definit symmetrisch.

Dann existiert eine pds $n \times n$ -Matrix $\mathbf{P}$ mit:

$$\mathbf{P}\mathbf{P} = \Omega^{-1} \text{ bzw. } \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \Omega \text{ bzw. } \mathbf{P}\Omega\mathbf{P} = \mathbf{I}$$

Wir benutzen nun $\mathbf{P}$, um die Daten $\mathbf{X}$ und $\mathbf{y}$ so zu transformieren, dass wir die bisherigen Techniken valide nutzen können!

GLS: Generalized Least Squares

MLR 1

$$\underbrace{Py}_{\tilde{y}} = \underbrace{PX}_{\tilde{X}} \beta + \underbrace{Pu}_{\tilde{u}}$$

Lineare Transformation der Daten:

$$\tilde{y} = Py, \quad \tilde{X} = PX$$

Schätze das Modell

$$\underline{\tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{u}} \quad (\text{mit } \tilde{u} = Pu)$$

per OLS.

Beachte: β wird nicht transformiert!

Heteroskedastische Störterme

$$\Omega^{-1/2} = P = \begin{pmatrix} \sigma_1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2/\sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n/\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{y} = P \cdot y = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2/\sigma_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n/\sigma_1 \end{pmatrix}}_{\underline{n \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\underline{n \times 1}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1/\sigma_1 & \sigma_2/\sigma_1 \\ \sigma_2/\sigma_1 & \sigma_3/\sigma_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_n/\sigma_1 & \sigma_n/\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_1/\sigma_1 \\ y_2/\sigma_2 \\ \vdots \\ y_n/\sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

$$\tilde{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} \tilde{X}'\tilde{y}$$

γ ist ein Skalierungsfaktor für die alle Daten.

Er kürzt sich für $\tilde{\beta}$ aber weg.

GLS: Generalized Least Squares

Prüfe die klassischen Annahmen für das transformierte Modell:

MLR 1: $\Omega^{-1} = \begin{matrix} n \times n \end{matrix} = \begin{matrix} P & P \\ n \times n & n \times n \end{matrix} \Rightarrow \text{rk}(P) = n$

Prämultiplikation von $\mathbf{P}$ ist eine lineare Transformation ✓

MLR 3:

$$\text{rk}(\tilde{\mathbf{X}}) = \text{rk}(\mathbf{P}\mathbf{X}) = \min\{\underbrace{\text{rk}(\mathbf{P})}_{=n}, \underbrace{\text{rk}(\mathbf{X})}_{=K+1}\} = \text{rk}(\mathbf{X}) = K + 1 \quad \checkmark$$

MLR 4:

$$E[\tilde{\mathbf{u}}|\tilde{\mathbf{X}}] = E[\mathbf{P}\mathbf{u}|\mathbf{X}] = \mathbf{P} \underbrace{E[\mathbf{u}|\mathbf{X}]}_{\text{MLR 4: } 0} = \mathbf{P}\mathbf{0} \quad \checkmark$$

MLR 5:

$$\mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}|\tilde{\mathbf{X}}) = \mathbb{V}(\mathbf{P}\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \mathbf{P} \underbrace{\mathbb{V}(\mathbf{u}|\mathbf{X})}_{\sigma^2 \Omega} \mathbf{P}' = \sigma^2 \mathbf{P}\Omega\mathbf{P} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad \checkmark$$

Demnach ist der OLS-Schätzer für das transformierte Modell BLUE!

$$P \cdot Q \cdot P = \underbrace{P \cdot Z}_I \cdot \underbrace{Z \cdot P}_I = I$$

$$Q = Z \cdot Z$$

$$P = Z^{-1}$$

$$Q^{-1} = P \cdot P$$

GLS: Generalized Least Squares

Der OLS-Schätzer der Transformierten Daten $\tilde{\beta}$ lautet demnach

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= (\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{y}} \\ &= ((\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{X}})' \underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{X}})^{-1} (\underline{\mathbf{P}}\underline{\mathbf{X}})' \underline{\mathbf{P}}\mathbf{y} \\ &\quad \textcolor{red}{p' = p} \\ &= (\underline{\mathbf{X}}' \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}' \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{P}} \mathbf{y} \\ &= (\underline{\mathbf{X}}' \underline{\Omega}^{-1} \underline{\mathbf{X}})^{-1} \underline{\mathbf{X}}' \underline{\Omega}^{-1} \mathbf{y}\end{aligned}$$

Wir nennen den **GLS-Schätzer** $\tilde{\beta}$ auch **Aitken-Schätzer**.

$$\tilde{\beta} = (X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y$$

$$\hat{\beta}(\tilde{\beta} | x) = \hat{\beta} \left(\underbrace{(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} y}_{\text{fest}} \mid \underline{x} \right)$$

$$(X' \Omega^{-1} X)^{-1} X' \Omega^{-1} \underbrace{\hat{\beta}(y | x)}_{\sigma^2 \cdot \Omega} \Omega^{-1} X (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$$

sym. $\mathbf{I}$

$$\hat{\beta}(y | x) = \hat{\beta}(\underbrace{x\beta + u}_{\text{fest}} | x) = \hat{\beta}(u | x) \stackrel{\text{hier}}{=} \sigma^2 \cdot \Omega$$

$$= \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \underbrace{X' \Omega^{-1} X (X' \Omega^{-1} X)^{-1}}_{\mathbf{I}}$$

$$\tilde{\beta} = (\tilde{x}'\tilde{x})^{-1}\tilde{x}'\tilde{y}$$

$$\sigma^2(\tilde{\beta}|x) = \sigma^2 \cdot (\tilde{x}'\tilde{x})^{-1}$$

$$= \sigma^2 \cdot (P'X)'P'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X' \cdot P P X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$$

Die Varianz des Aitken-Schätzers $\tilde{\beta}$

Mit $\tilde{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$ gilt:

Die Varianz des Aitken-Schätzers $\tilde{\beta}$

Mit $\tilde{\beta} = (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\tilde{\beta}|\mathbf{X}) &= \mathbb{V}((\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y}|\mathbf{X}) \\&= (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1} \mathbb{V}(\mathbf{u}|\mathbf{X}) \left((\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1} \right)' \\&= \sigma^2 (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \\&= \sigma^2 (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1} \\&= \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\&= \sigma^2 ((\mathbf{P}\mathbf{X})' \mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 (\tilde{\mathbf{X}}' \tilde{\mathbf{X}})^{-1}\end{aligned}$$

Das Gauss-Markov-Aitken Theorem

Unter den Annahmen *MLR* 1, 3, 4, 5' ist ein Schätzer innerhalb der Klasse der linearen und unverzerrten Schätzer varianzminimal (effizient), falls es sich um $\tilde{\beta}$ handelt.

Die Struktur des Beweises ist die folgende:

- ▶ Definiere die Klasse der linearen Schätzer.
- ▶ Charakterisiere darin die Unterklasse der unverzerrten Schätzer.
- ▶ Zeige Effizienz von $\tilde{\beta}$.

t - und F -Tests bei bekannten Parametern σ^2 und Ω

Die Varianz des GLS-Schätzers beträgt

$$\mathbb{V}(\tilde{\beta}|\mathbf{X}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

Alle darauf basierenden Statistiken (Standardfehler, t -Test, F -Test) behalten ihre Gültigkeit.

GLS: Schätzer für σ^2

Falls die Matrix $\mathbf{\Omega}$ bekannt ist, kann der Parameter σ^2 analog zu OLS geschätzt werden.

GLS-Residuen:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Py} - \mathbf{PX}\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}]\mathbf{u}$$

Schätzer $\tilde{\sigma}^2$ für σ^2 :

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n - K - 1} \tilde{\mathbf{u}}' \tilde{\mathbf{u}}$$

Nenner in t-Statistik
1 in F-Statistik

FGLS: Feasible Generalized Least Squares

Heteroskedastische Störterme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} & & & \\ & \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\sigma_n^2}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

Modell: $\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x_{ij} + \varepsilon_i$

erfüllt
MLR 5

$$\rightarrow \hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1$$

$$\rightarrow \hat{\sigma}_i^2$$

$$\rightarrow \hat{\Omega}$$

seriell korrelierte Störterme

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Modell autokorrelierter Prozess 1. Ordnung

$$U_t = \rho U_{t-1} + \varepsilon_t$$

OLS $\rightsquigarrow \hat{\rho}$

$$\frac{\text{Cov}(U_t, U_{t-s})}{\sqrt{\text{Var}(U_t)} \sqrt{\text{Var}(U_{t-s})}} = \rho^s$$

$\rightsquigarrow \hat{\Omega}$

FGLS: Feasible Generalized Least Squares

- ▶ GLS ist nicht durchführbar (infeasible), weil Ω bzw. P , mit der die Daten transformiert werden müssen, nicht bekannt ist.
- ▶ Um eine durchführbare (feasible) Variante zu erhalten, müssen zuerst die Elemente von Ω geschätzt werden. Dies wird mit **feasible generalized least squares** (FGLS) bezeichnet.
- ▶ Nach Ausnutzung der Symmetrie von Ω bleiben aber $\frac{n(n+1)}{2}$ Elemente, die geschätzt werden müssten – das sind zu viele!
- ▶ Nehme an, dass Elemente von Ω von einem Parameter-Vektor α funktional abhängen und schätze α durch $\hat{\alpha}$.
- ▶ Berechne nun $\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\alpha})$ und berechne $\tilde{\beta}^{FGLS}$ mit $\hat{\Omega}$.

Eigenschaften der OLS-, GLS- und FGLS-Schätzer

- ▶ Der OLS-Schätzer ist auch unter MLR 5' $\mathbb{E}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$ (pds) erwartungstreu.
- ▶ Der OLS-Schätzer ist aber nicht mehr effizient.
- ▶ Der GLS-Schätzer ist BLUE (und damit effizient).
- ▶ Der GLS-Schätzer ist aber nicht feasible.
- ▶ Der FGLS-Schätzer basiert auf geschätzten Größen und ist daher nur asymptotisch effizienter als OLS.
- ▶ In kleinen Stichproben muss FGLS nicht zwangsläufig besser sein als OLS.
- ▶ Die Eigenschaften hängen davon ab, dass die korrekte Form $\mathbf{\Omega}(\alpha)$ unterstellt wird.