

Formelsammlung – Kapitel 3: Multiple Lineare Regression

Ökonometrie (MSc.) im Sommer

1. Modellannahmen

MLR 1 Linearität in den Parametern, $y = X\beta + u$

MLR 2 Zufallsstichprobe (y, X)

MLR 3 Voller Spaltenrang der Regressormatrix X , $rk(X) = K + 1$

MLR 4 Strikte Exogenität der Regressoren, $\mathbb{E}[u|X] = \mathbb{E}[u] = 0$

MLR 5 Homoskedastizität und serielle Unkorreliertheit der Störterme, $\mathbb{V}(u|X) = \sigma^2 \cdot I_n$

MLR 6 Normalverteilte homoskedastische und seriell unkorrelierte Störterme, $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

2. Prognose und Residuum

$$\hat{y} = Xb, \quad \hat{u} = y - \hat{y} = y - Xb$$

3. Summe der quadrierten Residuen

$$S(b|y, X) = \hat{u}'\hat{u} = y'y - 2y'Xb + b'X'Xb$$

4. Gradient und Normalgleichungen

$$\nabla S(b) = -2X'y + 2X'Xb = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X'Xb = X'y$$

5. KQ-Schätzer

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

6. Momentenmatrix

$$X'X \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}, \quad X'X = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_K \\ \bar{x}_1 & \overline{x_1 x_1} & \dots & \overline{x_1 x_K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_K & \overline{x_K x_1} & \dots & \overline{x_K x_K} \end{pmatrix}$$

7. Idempotenz

$$A \cdot A = A$$

8. Projektionsmatrizen

$$P_X = X(X'X)^{-1}X', \quad P_X^\perp = I - X(X'X)^{-1}X'$$

$$\hat{y} = P_X y, \quad \hat{u} = P_X^\perp y = P_X^\perp u$$

$$\text{rk}(P_X) = K + 1, \quad \text{rk}(P_X^\perp) = n - (K + 1)$$

9. Streuungszerlegung

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2, \quad SSR = \hat{u}'\hat{u} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

$$SST = SSE + SSR$$

10. Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{SSE}{SST}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1$$

11. Spur und zyklische Vertauschung

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad \text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$$

$$\text{tr}(P_X) = \text{rk}(P_X) = K + 1, \quad \text{tr}(P_X^\perp) = \text{rk}(P_X^\perp) = n - K - 1$$

12. Schätzer für σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - K - 1} \hat{u}'\hat{u}, \quad E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$$

13. Gauß-Markov / BLUE

$$\hat{\beta} = Ay, \quad A = (X'X)^{-1}X'$$

$$AX = I_{K+1} \Rightarrow E[\hat{\beta}] = \beta \quad (\text{Unverzerrtheit})$$

$$\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2 AA' \leq \sigma^2 BB' \quad \text{für alle } B \text{ mit } BX = I_{K+1} \quad (\text{Effizienz})$$