

Matrizenalgebra



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.4 Vektoralgebra

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

12.5 Matrizenmultiplikation

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

12.8 Gauß'sche Elimination

Aufgabe 12.8.1

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

Schreibe den Vektor $(4, -11)$ als Linearkombination von $(2, -1)$ und $(1, 4)$.

Suche x_1 und x_2 , sodass

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

falls $|A| \neq 0$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{\underbrace{A}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} \stackrel{(\Rightarrow)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{\Rightarrow} \begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &= 4 \\ -1x_1 + 4x_2 &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right| = +2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 8 + 1 = 9 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

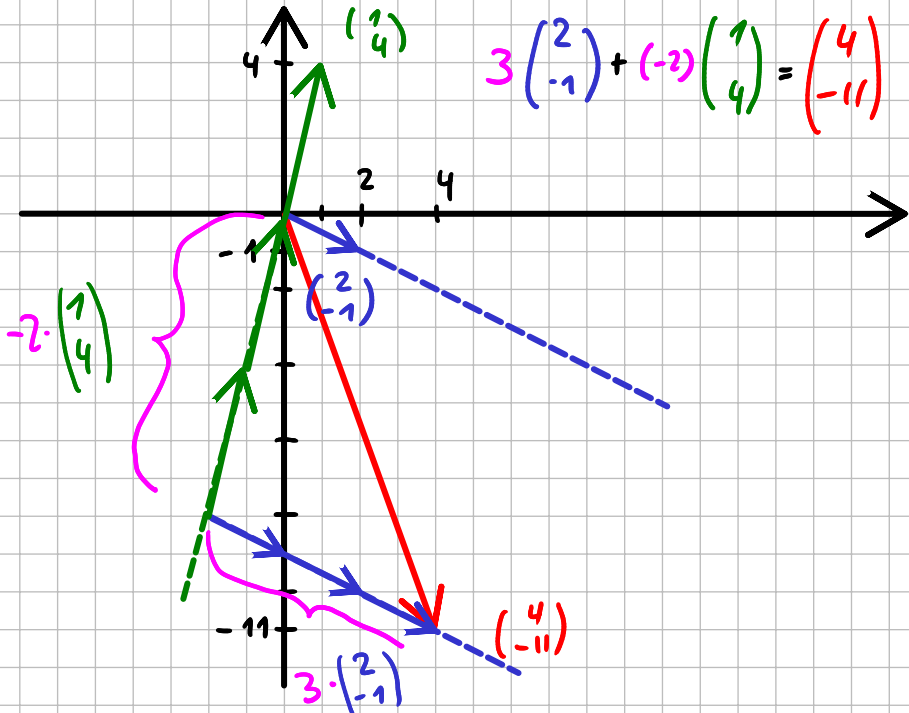
$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-11) \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-11) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 16 + 11 \\ 4 - 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = -2$$

Probe

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Bestimme alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+3b \\ c+2d & 2c+3d \end{pmatrix}$$

$$\cancel{a} + \cancel{2c} = \cancel{a} + \cancel{2b} \quad \Leftrightarrow \boxed{c = b}$$

$$b + 2d = 2a + 3b \quad \Leftrightarrow 2d = 2a + 2b \quad \Leftrightarrow \boxed{d = a + b}$$

$$2a + 3c = c + 2d \quad \Leftrightarrow 2a + 2c = 2d \quad \Leftrightarrow \overset{(\Rightarrow)}{a+c=d}$$

$$\cancel{2b} + \cancel{3d} = \cancel{2c} + \cancel{3d} \quad \Leftrightarrow b = c$$

Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

Eine quadratische Matrix A heißt **idempotent**, falls $AA = A$ gilt.

- a) Zeige, dass die folgende Matrix idempotent ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- b) Zeige: Wenn $AB = A$ und $BA = B$, dann sind A und B beide idempotent.
- c) Zeige: Wenn A idempotent ist, dann gilt $A^n = A$ für alle natürlichen Zahlen n .

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & -4 & -6 & 8 & -8 & -8 & +12 \\ 2 \cdot 2 + (-2)(-1) + (-4) \cdot 1 & 2(-2) + (-2) \cdot 3 + (-4) \cdot 2 & 2(-4) + (-2) \cdot 4 + (-4)(-3) \\ -1 \cdot 2 + 3(-1) + 4 \cdot 1 & -1(-2) + 3 \cdot 3 + 4(-2) & (-1)(-4) + 3 \cdot 4 + 4(-3) \\ 1 \cdot 2 + (-2)(-1) + (-3) \cdot 1 & 1(-2) + (-2) \cdot 3 + (-3)(-2) & 1(-4) + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad AB \stackrel{(1)}{=} A \quad BA \stackrel{(2)}{=} B$$

zu zeigen: $A \cdot A = A$ & $B \cdot B = B$

$$A A \stackrel{(1)}{=} \underline{AB} A \stackrel{(2)}{=} A B \stackrel{(1)}{=} A \quad \checkmark$$

$$B B \stackrel{(2)}{=} B \underline{AB} \stackrel{(1)}{=} B A \stackrel{(2)}{=} B \quad \checkmark$$

$$c) A^2 = \underline{A \cdot A = A}$$

Nehme an, dass $A^{n(*)} = A$ für ein n .

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \stackrel{(*)}{=} A \cdot A = A$$

$A^n = A$ gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

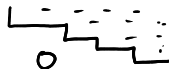
Gauß'sches Eliminationsverfahren

$$Ax = b$$

Dieses Verfahren eignet sich zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Benutze elementare Zeilenumformungen für die folgenden Schritte:

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $A|b$ in Treppenstufenform bringen
2. Führende Einträge $\rightarrow 1$
3. Alle Einträge über den führenden Einträgen $\rightarrow 0$



Gauß'sches Eliminationsverfahren

Mögliches Ergebnis:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\vec{b}$
1	0	a	0	c
0	1	b	0	d
0	0	0	1	e

Interpretation:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & ax_3 & = & c \\ & x_2 & + & bx_3 & = & d \\ & & & x_4 & = & e \end{array}$$

Aufgabe 12.8.1

Löse die folgenden Gleichungssysteme durch Gauß'sche Elimination:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_2 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$a) \quad x_1 + x_2 = 3$$

$$3x_1 + 5x_2 = 5$$

A b

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & \swarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \\ 0 & 2 & -4 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \vee (1.) \cdot 2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \\ 0 & 1 & -2 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \vee (2.) \\ \swarrow \cdot (-1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & \\ 0 & 1 & -2 & \end{array} \right] \begin{array}{l} \swarrow \vee (3.) \\ \end{array}$$

Probe

$$5 + (-2) = 3 \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 5 + 5(-2) = 5 \quad \checkmark$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 5$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = -2$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} b) & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 & \\ & \cancel{x_1} & \cancel{x_2} & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & \leftarrow \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \cdot (-2) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & \cdot (-1) \cdot (-2) \\ 1 & -1 & 1 & 5 & \leftarrow \\ 2 & 3 & -1 & 1 & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} & \leftarrow \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{9} & \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & \\ 0 & -3 & 0 & 1 & : (-3), : (-3) \\ 0 & -1 & -3 & -7 & \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \\ 1 & 2 & 1 & 4 & \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & -3 & -\frac{22}{3} & : (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{3} - \frac{22}{9} = \frac{20}{9} & \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{9} & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{20}{9} \quad x_2 = -\frac{1}{3} = -\frac{3}{9} \quad x_3 = \frac{22}{9}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} c) & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array}$$

$$x_1 - \frac{2}{5}x_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{3}{5}x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{5}x_3$$

$$x_2 = \frac{3}{5}x_3 \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_3^* \\ \frac{3}{5}x_3^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}x_3^* = t$$

$$d) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \swarrow \end{array}$$

Zeilen / Spalten sind
linear abhängig

$$\Rightarrow \text{rk}(A) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & b \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 5 - 9 = -4 \neq 0$$

$$\text{rk}(A|b) = 2$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$0 = -4 \quad \Downarrow$$

keine Lösung!