

Funktionen mehrerer Variablen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

14.1 Funktionen von zwei Variablen

14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

14.3 Geometrische Darstellung

14.4 Flächen

14.5 Funktionen von n Variablen

14.6 Partielle Ableitungen bei mehreren Variablen

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

14.9 Ökonomische Anwendung: Produktionsfunktion

14.1 Funktionen von zwei Variablen

Definitionsbereich

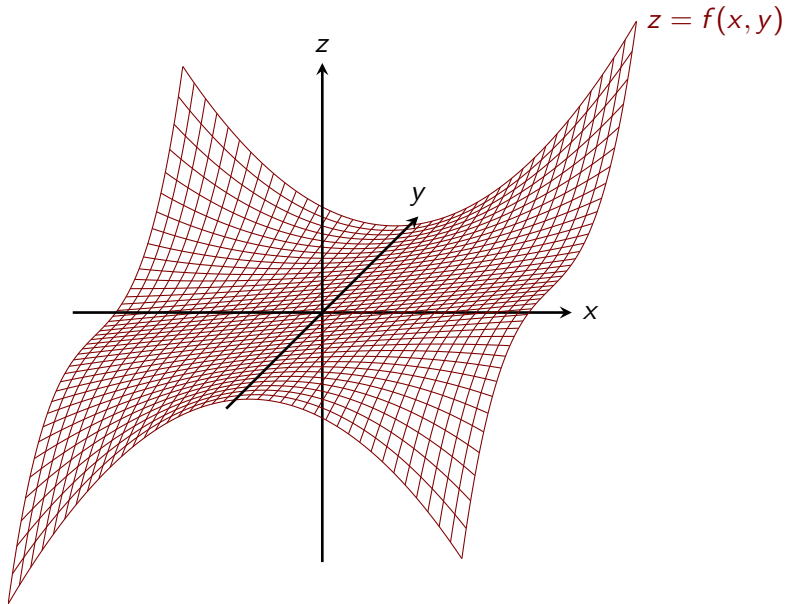
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$. — $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ „x-y-Ebene“

Eine Funktion f von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D ist eine Regel, die eine genau spezifizierte Zahl

$$f(x, y) \in \mathbb{R} \text{ zu jedem Punkt } (x, y) \in D$$

festlegt.

Beispiel: $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



$$f(x, y) = 2x + x^2 y^3$$

Gebe die Werte von f für folgende Zahlenpaare an:

$$a) (x, y) = (1, 0) \leadsto f(1, 0) = 2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 0^3 = 2$$

$$b) (x, y) = (0, 1) \leadsto f(0, 1) = 2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 1^3 = 0$$

$$c) (x, y) = (-2, 3) \leadsto f(-2, 3) = 2(-2) + (-2)^2 \cdot 3^3 = -4 + 4 \cdot 27 = 104$$

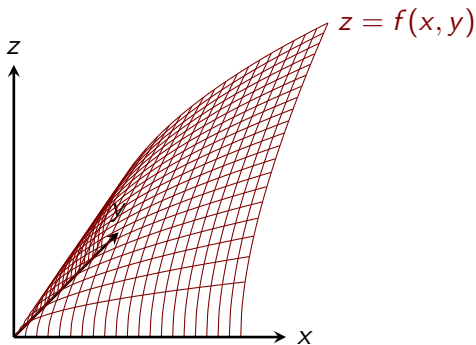
$$\begin{aligned} d) (x, y) = (a+1, b) \leadsto f(a+1, b) &= 2 \cdot (a+1) + (a+1)^2 \cdot b^3 \\ &= 2 \cdot a + 2 + (a^2 + 2a + 1) b^3 \\ &= 2 + \underline{2a} + \underline{a^2 b^3} + 2a b^3 + b^3 \\ &= 2 + 2a b^3 + b^3 + f(a, b) \end{aligned}$$

$$\Delta f = f(a+1, b) - f(a, b) = 2 + 2a b^3 + b^3$$

Beispiel: Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.



14.2 Partielle Ableitungen bei zwei Variablen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

∂ : "del"

δ : delta

Falls $z = f(x, y)$, dann ist

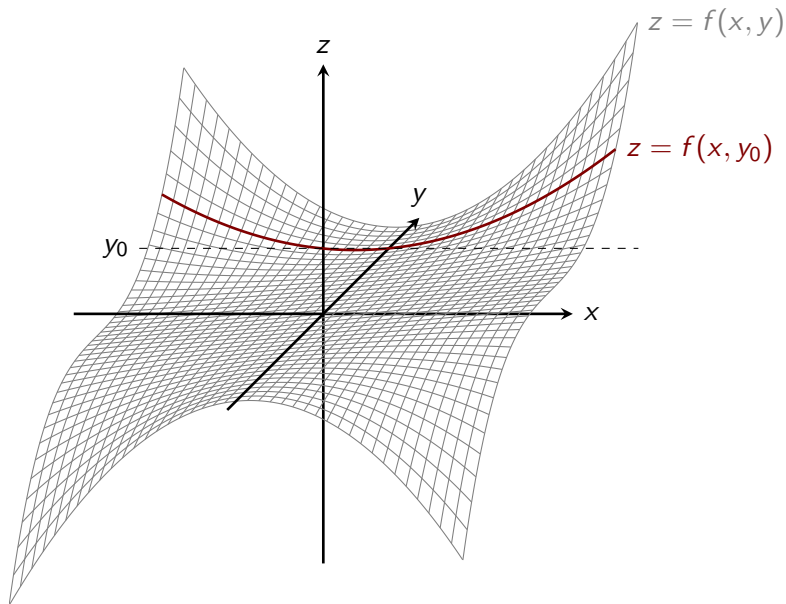
- ▶ $\frac{\partial z}{\partial x}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach x , wenn y konstant gehalten wird.
- ▶ $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Ableitung von $f(x, y)$ nach y , wenn x konstant gehalten wird.

Definition:

▶ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f'_1(x, y) := \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x+dx, y) - f(x, y)}{dx}$

▶ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f'_2(x, y) := \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{f(x, y+dy) - f(x, y)}{dy}$

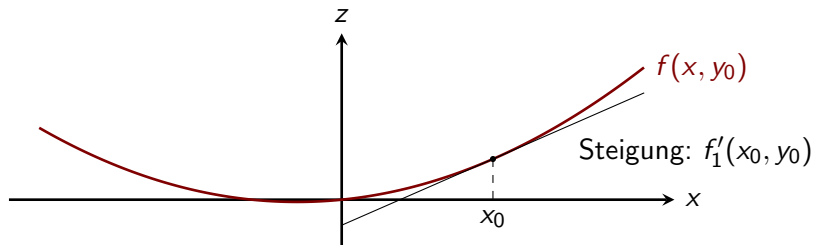
Beispiel $f(x, y) = 2x + x^2y^3$



Partielle Ableitung nach x

$$f(x, y_0) = 2x + x^2 y_0^3$$

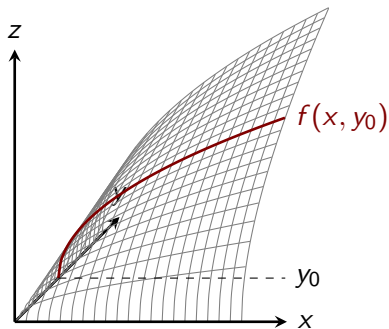
Betrachte die Variable y als konstanten Parameter: $y = y_0$



$$f'_1(x, y_0) = 2 + 2xy_0^3$$

Cobb-Douglas-Funktion $f(x, y) = Ax^c y^d$

mit $A, c, d > 0$.



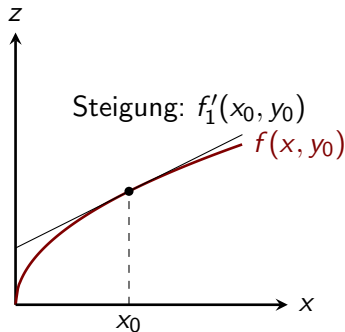
Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d$$

mit $A, c, d > 0$.

analog :

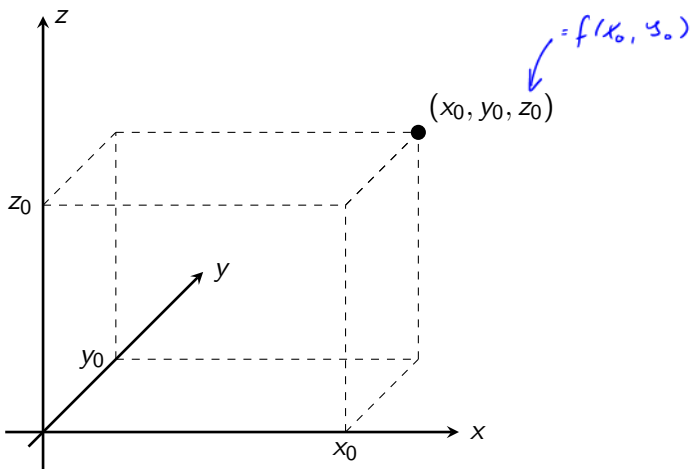
$$f_2'(x, y) = \frac{d}{y} \cdot f(x, y)$$



$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= A \cdot c \cdot x^{c-1} \cdot y^d = A \cdot c \cdot x^{c-1} y^d \\ &= c \cdot x^{-1} \cdot Ax^c y^d = \frac{c}{x} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

14.3 Geometrische Darstellung

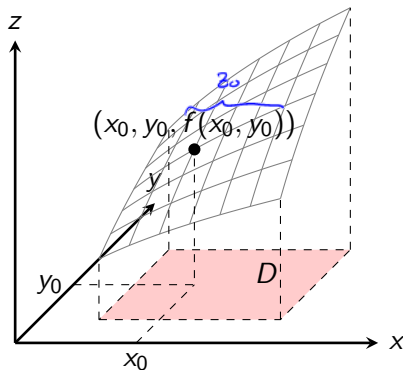
Koordinatensystem mit drei Dimensionen



$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0\}$: „nichtnegativer Oktant“

Der Graph einer Funktion von zwei Variablen

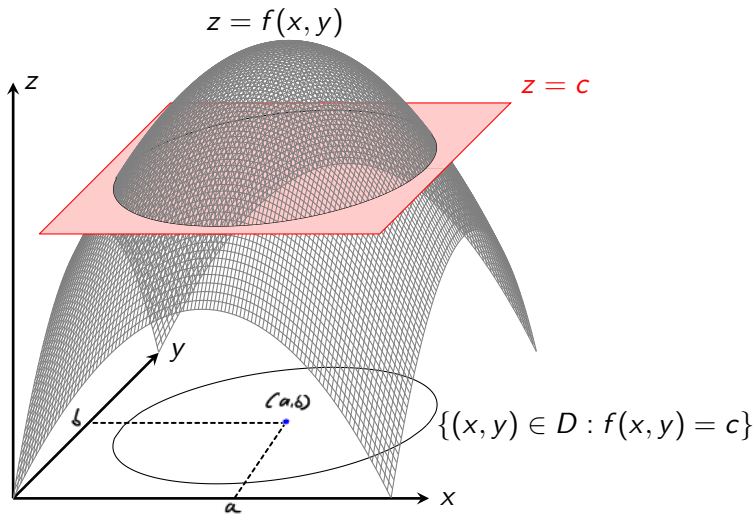
Der **Graph der Funktion** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$:



$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

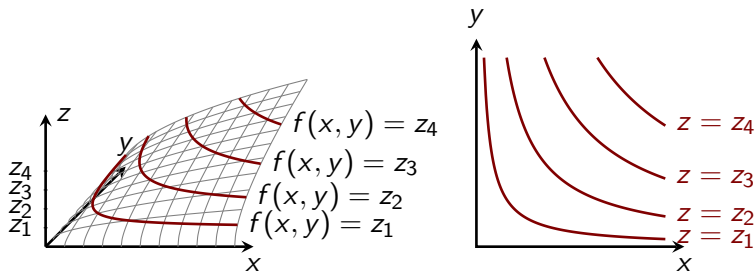
Höhenlinien

z.B. $f(x,y) = -(x-a)^2 - (y-b)^2 + d$



z.B.: $-(x-a)^2 - (y-b)^2 + d = c$

Isoquanten der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

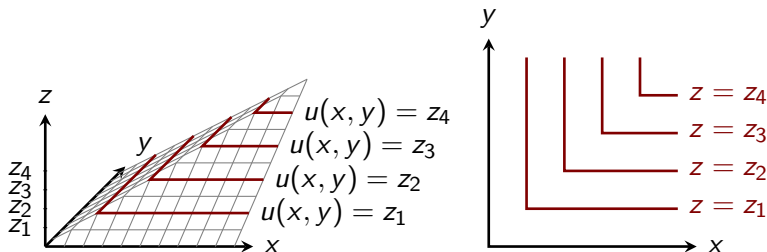


Eine **Isoquante** („gleich Menge“) gibt an, mit welchen Inputkombinationen (x, y) die Menge z produziert werden kann.

Isoquanten sind Projektionen der Höhenlinien von Produktionsfunktionen auf die Ebene der Inputmengen.

Indifferenzkurven für perfekte Komplemente

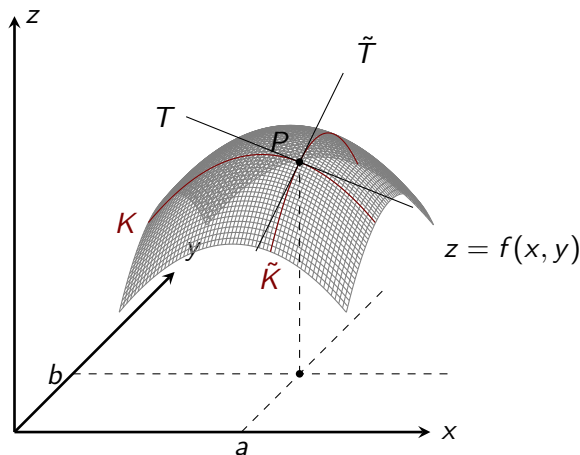
Leontief funktionen: $f(x,y) = \min\{ax, by\}$



Eine **Indifferenzkurve** gibt an, welche Güterbündel (x,y) den gleichen Nutzen generieren.

Indifferenzkurven sind Projektionen der Höhenlinien von Nutzenfunktionen auf die Ebene der Güterbündel.

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen

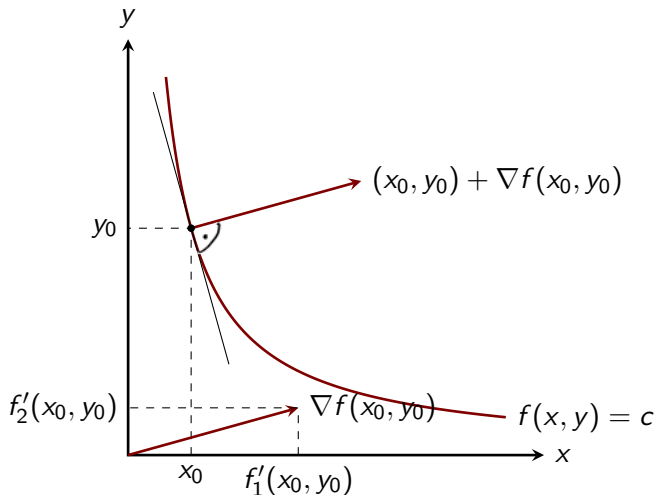


Steigung von T : $f'_1(a, b)$

Steigung von $\tilde{T}$: $f'_2(a, b)$

Der Gradient: Vektor der partiellen Ableitungen

$$\nabla f(x, y) = (f'_1(x, y), f'_2(x, y))$$



Der Gradient einer Cobb-Douglas Funktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d \quad , x, y \geq 0$$

1. partielle Ableitungen:

$$f'_1(x, y) = \frac{c}{x} \cdot f(x, y) \quad x, y > 0$$

$$f'_2(x, y) = \frac{d}{y} \cdot f(x, y)$$

Gradient

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{c}{x} \cdot \underline{f(x, y)} , \frac{d}{y} \cdot \underline{f(x, y)} \right) = \left(\frac{c}{x} , \frac{d}{y} \right) \cdot f(x, y)$$

Zweite partielle Ableitungen in zwei Variablen

Für jede der beiden Variablen x und y von f gibt es zwei partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{11} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{21} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = f''_{22}$$

Insgesamt gibt es also vier zweite partielle Ableitungen.

Zweite Ableitungen von $f(x, y) = 2x + x^2y^3$

1. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2 + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2$$

2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} = 2 \cdot 1 \cdot y^3 = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 2x \cdot 3y^2 = \underline{6xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot y^2 = \underline{6xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial y)^2} = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2y$$

Zweite Ableitungen von $f(x, y) = Ax^c y^d$

1. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= f(x, y) c x^{-1} &&= \frac{c}{x} \cdot f(x, y) \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= f(x, y) d y^{-1} &&= \frac{d}{y} \cdot f(x, y)\end{aligned}$$

2. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial x)^2} &= \dots = - \underline{f(x, y)} \cdot \frac{c}{x} \cdot \frac{1-c}{x} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= f_2'(x, y) \cdot c \cdot x^{-1} = \underbrace{\frac{d}{y} \cdot f(x, y)}_{f_2'} \cdot \frac{c}{x} = \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \cdot \underline{f(x, y)} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= f_1'(x, y) d y^{-1} = \frac{c}{x} \cdot f(x, y) \cdot \frac{d}{y} = \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \cdot \underline{f(x, y)} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{(\partial y)^2} &= \dots = - \underline{f(x, y)} \cdot \frac{d}{y} \cdot \frac{1-d}{y}\end{aligned}$$

$$f'_1(x, y) = f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1}$$

Produktregel!

$$\begin{aligned} f''_{11}(x, y) &= \underbrace{f'_1(x, y)}_{=} \cdot c \cdot x^{-1} + f(x, y) \cdot c \cdot (-1) \cdot x^{-2} \\ &= \underbrace{f(x, y) \cdot c \cdot x^{-1}}_{=} \cdot c \cdot x^{-1} - f(x, y) \cdot c \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \underline{f(x, y)} \cdot \underline{c} \cdot \underline{\frac{1}{x^2}} - \underline{f(x, y)} \cdot \underline{c} \cdot \underline{\frac{1}{x^2}} \\ &= f(x, y) \cdot c \cdot \frac{1}{x^2} (c - 1) \\ &= -f(x, y) \cdot \frac{c}{x} \cdot \frac{1-c}{x} = f''_{11}(x, y) \end{aligned}$$

analog:

$$f''_{22}(x, y) = -f(x, y) \cdot \frac{d}{y} \cdot \frac{1-d}{y}$$

Hesse-Matrix an der Stelle (x, y)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{11}(x, y) & f''_{12}(x, y) \\ f''_{21}(x, y) & f''_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x, y) \in D$.

Die Ableitungen f''_{12} und f''_{21} nennen wir auch „Kreuzableitungen“

Wenn alle zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$f''_{12}(x, y) = f''_{21}(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in D .$$

Hessematrix der Cobb-Douglas Funktion

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{c}{x} \cdot \frac{1-c}{x} \cdot f(x, y) & \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \cdot f(x, y) \\ \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \cdot f(x, y) & -\frac{d}{y} \cdot \frac{1-d}{y} \cdot f(x, y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{c}{x} \cdot \frac{1-c}{x} & \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \\ \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} & -\frac{d}{y} \cdot \frac{1-d}{y} \end{pmatrix} \cdot f(x, y)$$

14.4 Flächen: Eine Ebene im Raum

$$ax + by + cz = d$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit nicht $a = b = c = 0$ fest und $x, y, z \in \mathbb{R}$ variabel.

Alle Punkte (x, y, z) , welche diese Gleichung erfüllen, liegen auf einer **Ebene**.

Falls nicht $a = b = 0$, dann definiert $ax + by + c \cdot 0 = d$ die Schnittgerade der Ebene mit der xy -Ebene.

$$ax + by + cz = \underline{\underline{d}} \quad (*)$$

Interpretation 1

$$\Leftrightarrow ax + by - d = -cz$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c} = z$$

affine Funktion mit zwei Variablen

$$z = f(x, y) = \overset{0 \neq}{\left(\frac{d}{c}\right)} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

(*) : Graph von $f(x, y)$

Interpretation 2

Lineare Funktion mit drei Variablen

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

(*) Höhen „Linie“ von f
zum Niveau d

Höhenlinien von linearen Funktionen

eine Variable $\leadsto$ Punkt

zwei Variablen $\leadsto$ Gerade

drei Variablen $\leadsto$ Ebene

vier + Variablen $\leadsto$ Hyperebene

Ökonomische Anwendung: Budget-Ebene

Seien $x, y, z \geq 0$ Mengen dreier Güter und

seien $p_x, p_y, p_z > 0$ deren Preise.

Sei zusätzlich $m \geq 0$ das verfügbare Einkommen.

Alle Punkte (x, y, z) welche die Gleichung

$$\underbrace{p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z}_{\text{Ausgaben}} = m$$

erfüllen, kosten genau m Geldeinheiten. Sie liegen in der
Budget-Ebene.

Alle Güterbündel, die man sich leisten kann, bilden die
Budget-Menge:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq}^3 : p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z \leq m\}$$

Ausgabenfunktion

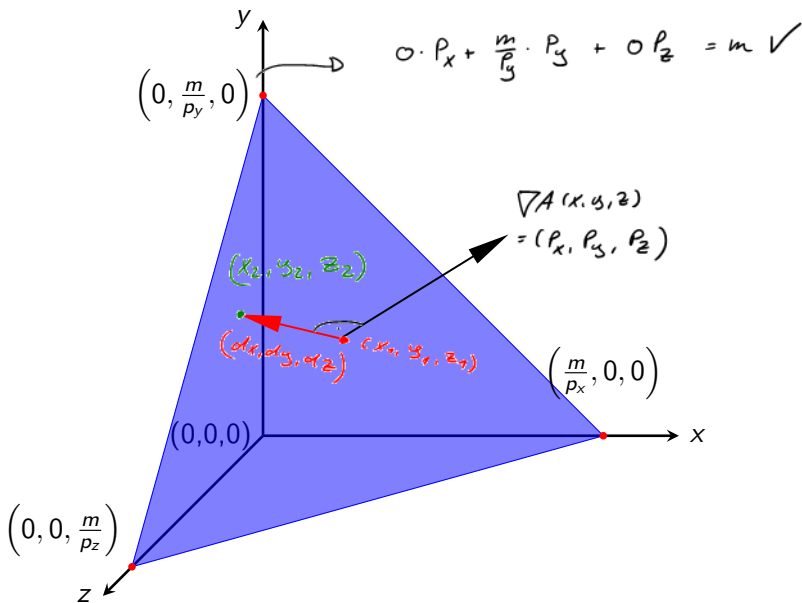
$$A(x, y, z) = p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z$$

Gradient von A

$$\nabla A(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z)$$

Grafische Darstellung der Budget-Ebene

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z = m$$



(x_1, y_1, z_1) liegt auf der Budgetebene

↳ (x_2, y_2, z_2) —||—

$$\text{I} \quad x_1 \cdot p_x + y_1 \cdot p_y + z_1 \cdot p_z = m$$

$$\text{II} \quad x_2 \cdot p_x + y_2 \cdot p_y + z_2 \cdot p_z = m$$

$$\text{II} - \text{I} : x_2 \cdot p_x - x_1 \cdot p_x + y_2 \cdot p_y - y_1 \cdot p_y + z_2 \cdot p_z - z_1 \cdot p_z = m - m$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x_2 - x_1)}_{dx} p_x + \underbrace{(y_2 - y_1)}_{dy} p_y + \underbrace{(z_2 - z_1)}_{dz} p_z = 0$$

$$\Leftrightarrow dx \cdot p_x + dy \cdot p_y + dz \cdot p_z = 0$$

$$\Leftrightarrow (dx, dy, dz) \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (dx, dy, dz) \perp (p_x, p_y, p_z)$$

Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^3$

Der **Abstand** zwischen zwei Punkten (x, y, z) und (a, b, c) ist

$$d = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

Eine **Kugel** mit Mittelpunkt (a, b, c) und Radius r ist definiert durch

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

14.5 Funktionen von n Variablen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller möglichen n -Vektoren $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ aus reellen Zahlen nennen wir **n -dimensionalen Euklidischen Raum** und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}^n$.

Funktion von n Variablen:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Der **Graph** der Funktion f bezeichnet die Menge aller Punkte $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ für die gilt $\mathbf{x} \in D$.

Die Menge aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die $f(\mathbf{x}) = z_0$ für $z_0 \in \mathbb{R}$ erfüllen, heißt **Fläche zum Niveau z_0** von f .

Verschiedene Funktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \dots, a_n, b, A \in \mathbb{R}$ Konstanten.

Lineare Funktion in n Variablen (für $b \neq 0$ „affin“):

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b$$

Cobb-Douglas Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = A x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$

Leontief Funktion in n Variablen:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \min \{a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n\}$$

Mittelwerte

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Lineare Funktion

(a) arithmetisches Mittel: $\bar{x}_A := \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

Cobb-Douglas-Funktion

(b) geometrisches Mittel: $\bar{x}_G := \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
(für $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$)
 $= x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot x_n^{\frac{1}{n}}$

(c) harmonisches Mittel: $\bar{x}_H := \frac{1}{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}$
(für $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$)

Falls $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, dann gilt allgemein:

$$\bar{x}_H \leq \bar{x}_G \leq \bar{x}_A$$

14.6 Partielle Ableitungen in n Variablen

Falls $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dann bedeutet $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, für $i = 1, 2, \dots, n$ die partielle Ableitung von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nach x_i , wenn alle anderen Variablen x_j für $j \neq i$, konstant gehalten werden.

Interpretation:

Die partielle Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ist annähernd gleich der Änderung in $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pro Einheit Erhöhung von x_i , während alle anderen x_j , für $j \neq i$ konstant gehalten werden.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f'_i(\mathbf{x}) = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + dx_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})}^{\Delta f}}{dx_i}$$

Gradient an der Stelle $\mathbf{x}$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

dann heißt

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_1(\mathbf{x}) \\ f'_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f'_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x} \in D$.

Zweite partielle Ableitungen in n Variablen

Für jede der n Variablen von f gibt es n partielle Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$$

(falls alle Ableitungen existieren.)

Insgesamt gibt es also n^2 zweite partielle Ableitungen.

Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}$

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal partiell differenzierbar.

Dann heißt

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{1n}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{n1}(\mathbf{x}) & f''_{n2}(\mathbf{x}) & \dots & f''_{nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $\mathbf{x} \in D$.

f''_{ii} : „direkte partielle Ableitung“

f''_{ij} (mit $i \neq j$): „gekreuzte partielle Ableitung“

Wenn f''_{ij} stetig ist für alle $i, j = 1, \dots, n$, dann gilt

$$f''_{ij}(\mathbf{x}) = f''_{ji}(\mathbf{x}) \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n \text{ und für alle } \mathbf{x} \in D.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3$$

$$x_1 = 5$$

$$x_3 = -2$$

$$5 \cdot 5^2 + 5 \cdot x_2^3 - x_2^2 \cdot (-2)^2 + (-2)^3$$

Bestimme den Gradienten $\nabla f(x_1, x_2, x_3)$

und die Hessematrix $f''(x_1, x_2, x_3)$!

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = f'_1 = 2 \cdot 5 x_1 + 1 \cdot x_2^3 = 10 x_1 + x_2^3$$

$$f'_2 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 2 x_2 x_3^2$$

$$f'_3 = -2 x_3 x_2^2 + 3 x_3^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 10 x_1 + x_2^3 \\ 3 x_1 x_2^2 - 2 x_2 x_3^2 \\ -2 x_3 x_2^2 + 3 x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$f'_1 = 10x_1 + x_2^3 \quad f'_2 = 3 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 2x_2 \cdot x_3^2$$

$$f'_3 = -2x_3x_2^2 + 3x_3^2$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{(\partial x_1)^2} = f''_{11} = 10$$

$$f''_{12} = \underline{3x_2^2}$$

$$\underline{f''_{13} = 0}$$

$$f''_{21} = \underline{3 \cdot x_2^2}$$

$$f''_{22} = 6x_1x_2$$

$$f''_{23} = \underline{-4x_2x_3}$$

$$\underline{f''_{31} = 0}$$

$$f''_{32} = \underline{-4x_3x_2}$$

$$f''_{33} = -2x_2^2 + 6x_3$$

$$f''(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 10 & 3x_2^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 6x_1x_2 & -4x_2x_3 \\ 0 & -4x_2x_3 & -2x_2^2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

14.8 Konkave und konvexe Funktionen

Sei f eine Funktion, definiert auf einer konvexen Menge D .

f ist **konvex**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \leq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b})$$

f ist **konkav**, wenn für alle $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in D und für alle λ in $[0, 1]$ gilt:

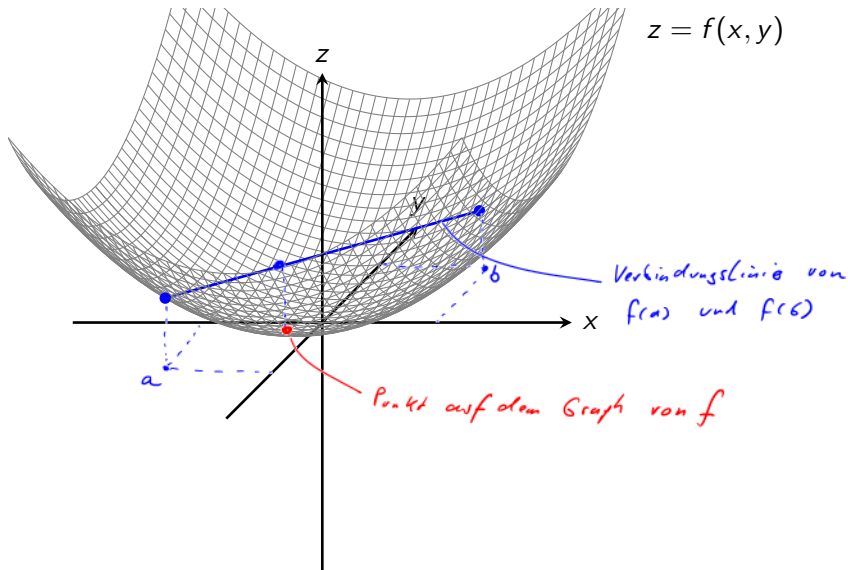
$$f(\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b}) \geq \lambda f(\mathbf{a}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{b})$$

f ist **strikt konvex/konkav** bei $<, >, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \lambda \in (0, 1)$

Falls $D \subseteq \mathbb{R}$: Definition identisch zu Kapitel 8.

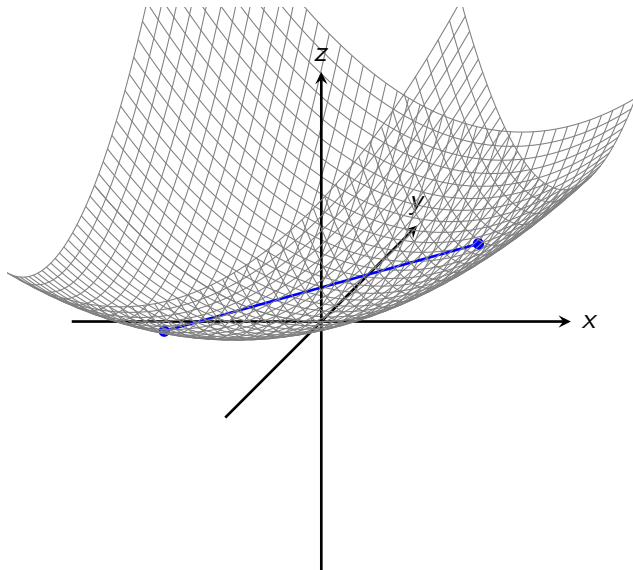
Falls $D \subseteq \mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sind Vektoren. Die Idee der Definition bleibt aber erhalten.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$

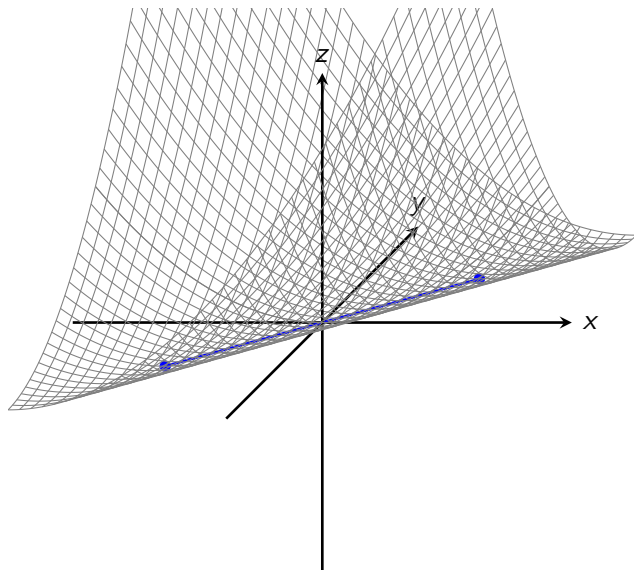


Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$

$$z = f(x, y)$$



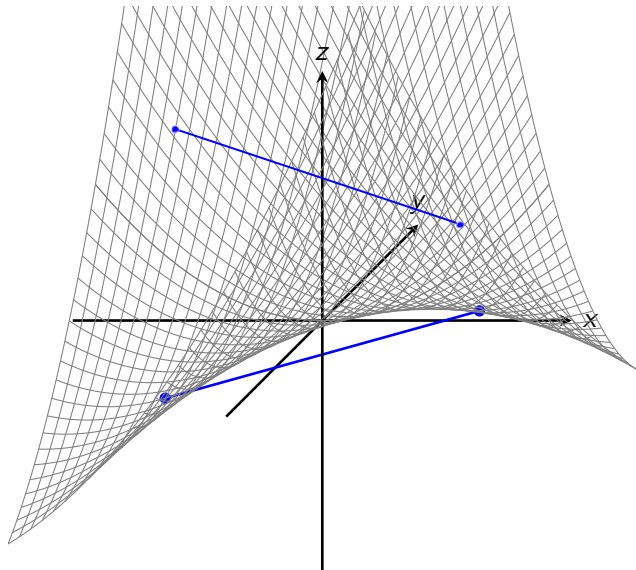
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$



$$z = f(x, y)$$

Schwach
Konvex

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$



$$z = f(x, y)$$

weder konvex
noch konkav

Konvexität/Konkavität und 2. partielle Ableitungen

In allen drei Beispielen

streng $\rightarrow x^2 + y^2$

konvex $\rightarrow x^2 + y^2 - xy$

konvex $\rightarrow x^2 + y^2 - 2xy$

weder noch $\rightarrow x^2 + y^2 - 3xy$

gilt $f''_{11} = f''_{22} = 2 > 0$.

$$f'_1 = 2x, f'_2 = 2y, f''_{11} = 2, f''_{22} = 2$$

$$f'_1 = 2x - y, f'_2 = 2y - x, f''_{11} = 2, f''_{22} = 2$$

$$f'_1 = 2x - 2y, f'_2 = 2y - 2x, f''_{11} = 2, f''_{22} = 2$$

$$f'_1 = 2x - 3y, f'_2 = 2y - 3x, f''_{11} = 2, f''_{22} = 2$$

Es stellen jedoch nur die ersten zwei Beispiele streng konvexe Funktionen dar.

Bei multivariaten Funktionen kommt es nicht nur auf die Vorzeichen von f''_{ii} an, sondern auf alle zweiten partiellen Ableitungen.

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \geq 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} > 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} > f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} \leq 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$$

$$f \text{ streng konkav} \Leftrightarrow f''_{11}, f''_{22} < 0 \text{ und } f''_{11} f''_{22} > f''_{12} f''_{21}$$

Beachte, dass jede zweite partielle Ableitung von dem jeweiligen Punkt (x, y) abhängen kann. Die Ungleichungen müssen für jeweils alle Punkte $(x, y) \in D$ gelten.

Falls in einem Punkt (x, y) gilt, dass $f''_{11} f''_{22} < f''_{12} f''_{21}$, dann ist die Funktion weder konvex noch konkav.

Hesse matrix

$$f'' = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{21} & f''_{22} \end{pmatrix}$$

$$f''_{11} \cdot f''_{22} \geq f''_{12} \cdot f''_{21}$$

$\Leftrightarrow$

$$\det(f'') = f''_{11} \cdot f''_{22} - f''_{12} f''_{21} \geq 0$$

Beispiel $f(x, y) = x^2 + y^2 - t \cdot xy$

$$f'_1 = 2x - ty$$

$$f'_2 = 2y - tx$$

$$f'' = \begin{pmatrix} \underbrace{2}_{>0} & -t \\ -t & \underbrace{2}_{>0} \end{pmatrix}$$

Falls $t < -2$ oder $t > 2$

$$f''_{11} \cdot f''_{22} < f''_{12} \cdot f''_{21}$$

f weder konvex noch konkav.

Falls $-2 \leq t \leq 2$

$$\Rightarrow f''_{11}, f''_{22} > 0$$

$$f''_{11} \cdot f''_{22} \geq f''_{12} f''_{21}$$

$\Rightarrow f$ konvex

Falls $-2 < t < 2$

$$\Rightarrow f''_{11}, f''_{22} > 0$$

$$f''_{11} \cdot f''_{22} > f''_{12} f''_{21}$$

$\Rightarrow f$ streng konvex

$$\det(f'') = 2 \cdot 2 - (-t) \cdot (-t)$$

$$= 4 - t^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq t^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq |t|$$

$$\Leftrightarrow t \leq 2 \text{ und } t \geq -2$$

Konkavität und Konvexität und die Hessematrix

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \text{ positiv semi definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftarrow f''(\mathbf{x}) \text{ positiv definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ konkav} \Leftrightarrow f''(\mathbf{x}) \text{ negativ semi definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

$$f \text{ streng konkav} \Leftarrow f''(\mathbf{x}) \text{ negativ definit für alle } \mathbf{x} \in D$$

14.9 Ökonomische Anwendung: Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Die Hesse-Matrix der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$f(x, y) = Ax^c y^d \text{ mit } c, d > 0, A > 0$$

haben wir für $x, y > 0$ bereits berechnet:

$$f''(x, y) = f(x, y) \begin{pmatrix} -\frac{c}{x} \frac{1-c}{x} & \frac{c}{x} \frac{d}{y} \\ \frac{c}{x} \frac{d}{y} & -\frac{d}{y} \frac{1-d}{y} \end{pmatrix}$$

Unter welchen Bedingungen ist die
Cobb-Douglas-Produktionsfunktion (streng) konkav für $x, y > 0$?

$$f''_{11} = - \underbrace{\frac{c}{x}}_{\substack{< 0 \text{ falls } c < 1 \\ = 0 \text{ falls } c = 1 \\ > 0 \text{ falls } c > 1}} \cdot \underbrace{\frac{1-c}{x}}_{\substack{> 0 \\ < 0 \\ = 0}} \cdot \underbrace{f(x,y)}_{> 0}$$

für $x, y > 0$

$$f''_{22} = - \frac{d}{y} \frac{1-d}{y} f(x,y)$$

< 0 falls $d < 1$
 $= 0$ falls $d = 1$
 > 0 falls $d > 1$

$$\begin{aligned} \det(f'') &= \left(- \frac{c}{x} \frac{1-c}{x} \underline{f(x,y)} \right) \left(- \frac{d}{y} \frac{1-d}{y} \underline{f(x,y)} \right) - \left(\frac{c}{x} \frac{d}{y} \underline{f(x,y)} \right) \left(\frac{c}{x} \frac{d}{y} \underline{f(x,y)} \right) \\ &= \underline{f(x,y)}^2 \cdot \frac{c}{x} \frac{d}{y} \left(\frac{1-c}{x} \frac{1-d}{y} - \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{y} \right) \\ &= \underline{f(x,y)}^2 \cdot \frac{c}{x^2} \frac{d}{y^2} \left((1-c)(1-d) - cd \right) \\ &\quad \quad \quad > 0 \end{aligned}$$

$$\det(f'') \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (1-c)(1-d) - c \cdot d \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - d - c + \cancel{c \cdot d} - \cancel{c \cdot d} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq c + d$$

$$f(x, y) = A x^c y^d \quad \text{mit } A, c, d > 0 \quad \text{ist}$$

$$\text{Konvex} \quad (\Leftrightarrow) \quad c \geq 1 \text{ und } d \geq 1 \quad \text{und} \quad c + d \leq 1 \quad \Downarrow$$

$$\text{streng konvex} \quad (\Leftrightarrow) \quad c > 1 \text{ und } d > 1 \quad \text{und} \quad c + d < 1 \quad \Downarrow$$

$$\text{Konkav} \quad (\Leftrightarrow) \quad c \leq 1 \text{ und } d \leq 1 \quad \text{und} \quad c + d \leq 1$$

$$\text{streng konkav} \quad (\Leftrightarrow) \quad c < 1 \text{ und } d < 1 \quad \text{und} \quad c + d < 1$$

14.9 Ökonomische Anwendung: Leontief Produktionsfunktion

$$h(x, y) = c \cdot x \quad \text{konkav}$$

$$g(x, y) = d \cdot y \quad \text{konkav}$$

Die Leontief Produktionsfunktion ist definiert durch:

$$f(x, y) = \min\{\underbrace{cx}_{\text{red}}, \underbrace{dy}_{\text{green}}\} \text{ mit } c, d > 0$$

Problem: Entlang der Gerade $cx = dy$ hat die Funktion eine Falte; sie ist dort nicht differenzierbar.

$$f(x, y_0) = \begin{cases} cx & \text{falls } cx \leq dy_0 \\ dy_0 & \text{falls } cx > dy_0 \end{cases}$$

Ist diese Produktionsfunktion (streng) konkav?

Das Minimum zweier konkaver Funktionen ist konkav.

Zusammenfassung

- ▶ Funktionen mit zwei und mehr Variablen
- ▶ Geometrische Darstellung:
Höhenlinien als Isoquanten & Indifferenzkurven
- ▶ Ebenen und Abstand
- ▶ Erste und zweite partielle Ableitungen:
Gradient und Hesse-Matrix
- ▶ Konvexe und konkave Funktionen