Übung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

12.4 Vektoralgebra
Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

12.5 Matrizenmultiplikation
Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation
Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

12.8 Gauß'sche Elimination
Aufgabe 12.8.1

Aufgabe 12.4.6 von Seite 535

Schreibe den Vektor $(4, -11)$ als Linearkombination von $(2, -1)$ und $(1, 4)$.

Aufgabe 12.5.7 von Seite 541

Bestimme alle Matrizen $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12.6.6 von Seite 548

Eine quadratische Matrix A heißt **idempotent**, falls $AA = A$ gilt.

a) Zeige, dass die folgende Matrix idempotent ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Zeige: Wenn $AB = A$ und $BA = B$, dann sind A und B beide idempotent.

c) Zeige: Wenn A idempotent ist, dann gilt $A^n = A$ für alle natürlichen Zahlen n.

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Dieses Verfahren eignet sich zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Benutze elementare Zeilenumformungen für die folgenden Schritte:

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ in Treppenstufenform bringen
2. Führende Einträge $\rightarrow 1$
3. Alle Einträge über den führenden Einträgen $\rightarrow 0$

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Mögliches Ergebnis:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & a & 0 & c \\
0 & 1 & b & 0 & d \\
0 & 0 & 0 & 1 & e
\end{array}$$

Interpretation:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & + & ax_3 & & = & c \\
 & x_2 & + & bx_3 & & = & d \\
 & & & & x_4 & = & e
\end{array}$$

Aufgabe 12.8.1

Löse die folgenden Gleichungssysteme durch Gauß'sche Elimination:

a)

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_2 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$