

Determinanten, Inverse und quadratische Formen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

13.2 Determinanten der Ordnung 3

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

13.6 Die Inverse einer Matrix

13.7 Eine allgemeine Form für die Inverse

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

13.12 Quadratische Formen

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

bzw.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

falls $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$.

$$\det(\mathbf{A})$$

Determinanten der Ordnung 2

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

Der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **determiniert** also, ob

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix **A** und schreiben $\det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

Beispiel 13.1.1

$$\det(A) = |A| = \underbrace{+ a_{11} \cdot a_{22}} - \underbrace{a_{12} a_{21}}$$

Die Matrix **A** laute

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $|A| = 12$

$$= \underbrace{2 \cdot 3} - \underbrace{(-6) \cdot 1} = 6 + 6 = 12$$

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_{12} \\ b_2 & b_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow b_1 \cdot 3 - b_2 \cdot (-6) \\ = 3b_1 + 6b_2$$

$$\hookrightarrow 2b_2 - 1b_1 = 2b_2 - b_1$$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right| \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Im Beispiel

$$x_1 = \frac{1}{12} (3 \cdot 6_1 + 6 \cdot 6_2) = \frac{6_1 + 2 \cdot 6_2}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{12} (2 \cdot 6_2 - 6_1) = \frac{2 \cdot 6_2 - 6_1}{12}$$

Beispiel

Berechne mit den Formeln von voriger Folie die Lösung des Gleichungssystems

$$2x_1 - 6x_2 = 4 \quad b_1$$

$$x_1 + 3x_2 = 0 \quad b_2$$

$$x_1 = \frac{b_1 + 2b_2}{4} = \frac{4 + 2 \cdot 0}{4} = 1$$

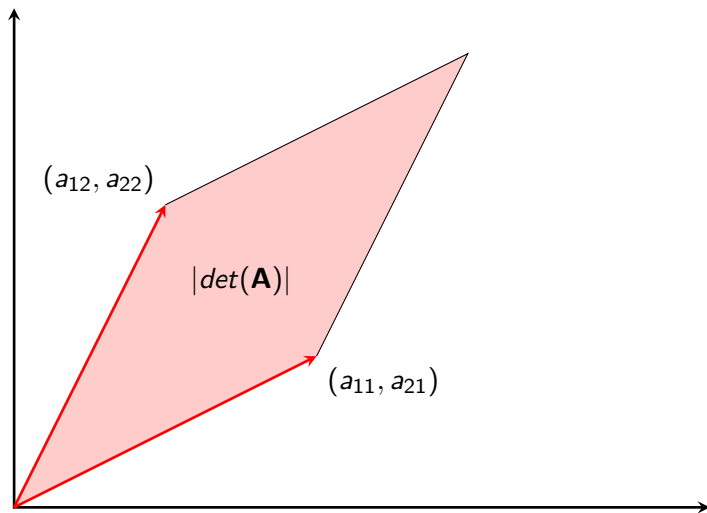
$$x_2 = \frac{2b_2 - b_1}{12} = \frac{2 \cdot 0 - 4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Probe:

$$2 \cdot 1 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 + 2 = 4 \quad \checkmark$$

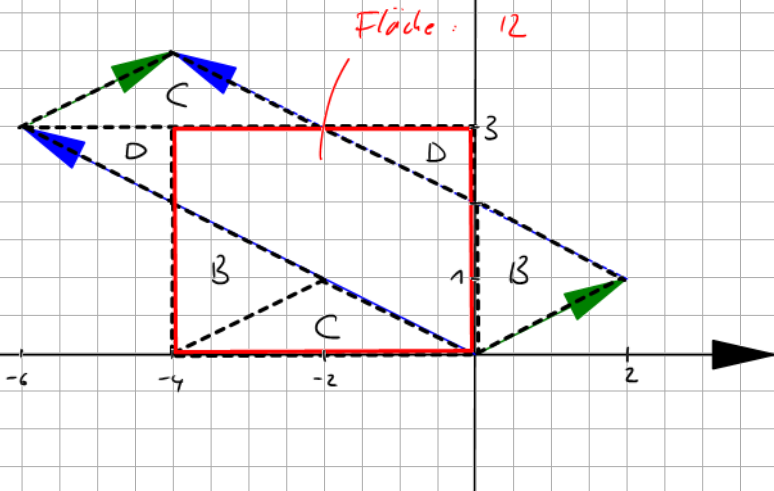
$$1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Geometrische Interpretation der Determinante



$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche: } a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = |\det(A)|$$



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei **A** eine Matrix der Ordnung 3×3 :

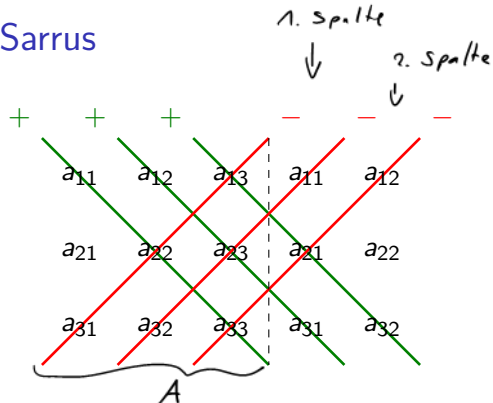
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von **A** ist definiert durch:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus



$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Lösung eines 3×3 -Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$).

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$. Dann gilt:

- ▶ Falls $\mathbf{A}$ eine 0-Zeile (oder 0-Spalte) hat, dann $|\mathbf{A}| = 0$.
- ▶ $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- ▶ Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$)
- ▶ Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
- ▶ Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.
- ▶ $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (, wobei $\mathbf{B}$ $n \times n$)

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Streichmatrix $\mathbf{A}_{ij}$ einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schachbrettorzeichen:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (-1)^{i+j}$$

Determinante einer Matrix der Ordnung $n \times n$

Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist für eine beliebige Zeile i gegeben durch

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

In Summenschreibweise:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Analog für die Festlegung auf eine beliebige Spalte j :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Wähle – falls möglich – eine Zeile i oder Spalte j mit vielen Nullen!

Beispiel $|A| = -0 \cdot |A_{41}| + 0 \cdot |A_{42}| - 0 \cdot |A_{43}| + a_{44} \cdot |A_{44}|$

Wie lautet die Determinante der (Dreiecks-)Matrix **A**?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 & -3 \\ 0 & a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

benutze $i=4$

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{43} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & -3 \\ 0 & a_{22} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{42} = \begin{pmatrix} a_{11} & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 \\ 0 & a_{22} & -5 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = -0 \cdot |A_{41}| + 0 \cdot |A_{42}| - 0 \cdot |A_{43}| + a_{44} \cdot |A_{44}|$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 \\ -0 & a_{22} & -5 \\ 0 & -0 & a_{33} \end{pmatrix} = B$$

$$|B| = |A_{44}| = +0 \cdot |B_{31}| - 0 \cdot |B_{32}| + a_{33} \cdot |B_{33}|$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B_{33}| &= a_{11} \cdot a_{22} - 2 \cdot 0 \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \end{aligned}$$

$$|B| = |A_{44}| = a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{22}$$

$$|A| = a_{44} \cdot |A_{44}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Eine Gruppe von Vektoren gleicher Ordnung sind linear abhängig, falls einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Beispiele

$$\mathbf{a} = (1, -2), \mathbf{b} = (-2, 4)$$

Wegen $\mathbf{b} = -2 \cdot \mathbf{a}$ sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^2$ liegen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auf einer Geraden durch den Ursprung.

$$\mathbf{c} = (1, -2, 3), \mathbf{d} = (-2, 4, -2), \mathbf{e} = (-1, 2, 1)$$

Wegen $\mathbf{e} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ sind $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ & $\mathbf{e}$ linear abhängig.

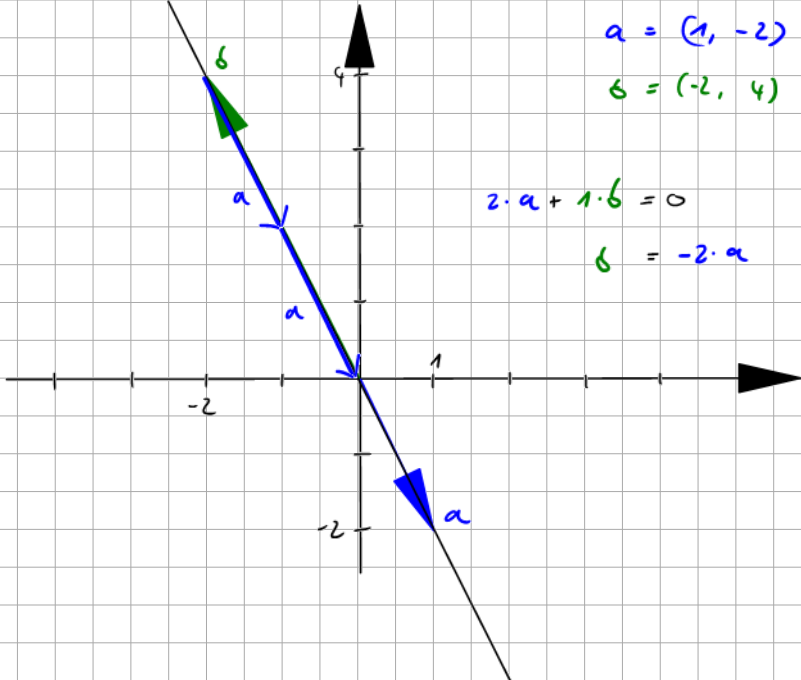
Im $\mathbb{R}^3$ liegen $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ & $\mathbf{e}$ auf einer Ebene. $\rightarrow 1 \cdot \mathbf{c} + 1 \cdot \mathbf{d} - 1 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}$

$$a = (1, -2)$$

$$b = (-2, 4)$$

$$2 \cdot a + 1 \cdot b = 0$$

$$b = -2 \cdot a$$



Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}}_{\text{Linearkombination}} \Rightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

In Matrix-Schreibweise bedeutet dies für die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ und den Vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

oder äquivalent (Kontraposition):

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$$

$$A \cdot x = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \right]}_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \vdots \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$Ax=0$  homogenes Gleichungssystem

hat immer mindestens eine Lösung: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ "triviale Lösung"

Spalten von A sind linear unabhängig, falls es nur diese Lösung gibt.

Beispiel

$$-2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

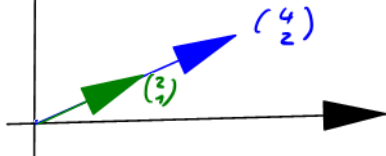
Sind die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot (-2) \end{matrix}$$



$$\begin{pmatrix} 4 + (-2) \cdot 2 & 2 + (-2) \cdot 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Determinante $|\mathbf{P}|$?

$$|\mathbf{P}| = +4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$$

Noch ein Beispiel

Welche Bedingung muss an $a, c, d, e, f, h \neq 0$ gestellt werden, damit die Spaltenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $A_{12} = \begin{pmatrix} a & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

linear unabhängig sind? Bedingung: $af \neq cd$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= +0 \cdot |A_{31}| - h |A_{32}| + 0 |A_{33}| = -h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ &= -h (af - dc) \neq 0 \Leftrightarrow af \neq cd \end{aligned}$$

Wie lautet $|\mathbf{A}|$?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX=0$$

$$ax_1 + cx_3 = 0$$

$$(cd - af)x_3 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$ax_1 + 0x_2 + c \cdot x_3 = 0$$

$$dx_1 + ex_2 + f \cdot x_3 = 0$$

$$0x_1 + hx_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

$$\Rightarrow h \cdot x_2 = 0 : h, h \neq 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$ax_1 + cx_3 = 0 \quad | \cdot d$$

$$dx_1 + fx_3 = 0 \quad | \cdot (-a)$$

$$\begin{cases} a \cdot dx_1 + c \cdot dx_3 = 0 \\ -a \cdot dx_1 - a \cdot f x_3 = 0 \end{cases} \quad | \quad +$$

$$\Rightarrow c \cdot dx_3 - af x_3 = 0$$

$$\begin{array}{l}
 ax_1 + cx_3 = 0 \\
 (cd - af)x_3 = 0 \\
 x_2 = 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \swarrow cd = af \Rightarrow \text{alle } x_3 \text{ Teil der Lösung} \\
 \searrow cd \neq af \Rightarrow \text{nur } x_3 = 0 \text{ Teil der Lösung}
 \end{array}$$

$\rightarrow x_1 = -\frac{c}{a}x_3$

$$\underline{\underline{cd = af}}$$

$$\text{Lösung} \begin{pmatrix} -\frac{c}{a}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Gerade durch den Ursprung

$$\underline{\underline{cd \neq af}}$$

$$\text{Lösung} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen zu linearer Unabhängigkeit

- ▶ Lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass sich **kein** $\mathbf{a}_j$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ darstellen lässt.
- ▶ Andernfalls kann z.B. im Fall $x_1 \neq 0$ der Vektor $\mathbf{a}_1$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_j$'s dargestellt werden:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^n x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = - \sum_{j=2}^n \frac{x_j}{x_1} \mathbf{a}_j.$$

- ▶ Es können höchstens n Vektoren $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sein. Beispielsweise sind die n Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Rang einer Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Der **Spaltenrang** von $\mathbf{A}$ ist die größte Anzahl linear unabhängiger Spalten von $\mathbf{A}$.

Der **Zeilenrang** von $\mathbf{A}$ ist die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen von $\mathbf{A}$.

Der Spaltenrang von $\mathbf{A}$ entspricht immer dem Zeilenrang von $\mathbf{A}$.

Wir nennen beides daher nur **Rang** der Matrix $\mathbf{A}$, $rk(\mathbf{A})$.

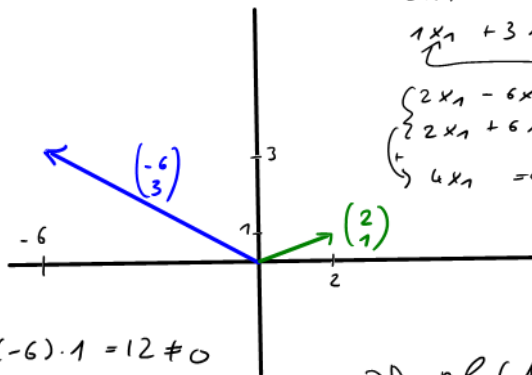
Rang: Beispiele

Wie lauten die Ränge der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ?$$

$r_2(\mathbf{A})=2$ $r_2(\mathbf{B})=2$ $r_2(\mathbf{C})$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$2x_1 - 6x_2 = 0$$

$$1x_1 + 3x_2 = 0 \quad \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0$$

$$|\mathbf{A}| = 2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1 = 12 \neq 0$$

$$\leadsto r_2(\mathbf{A}) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 0$$

$$1x_1 + 3x_2 = 0 \quad -2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_2 + 6x_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ + \end{array}$$

$$4x_1 - 4x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_3$$

$$\Rightarrow x_3 + 3x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = -x_3$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{3}x_3$$

z.B. für $x_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} : 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ -\frac{1}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

$\text{rk}(B)$

$x_3 \in \mathbb{R}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{array} \right\} \text{Lösung} \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{array} \right) \cdot x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ nur eine Lösung: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ alle Zeilen & Spalten lin. unabh.

$$\Rightarrow \text{rk}(C) = 3$$

$$|C| = +4(2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1) = 4 \cdot 12 = 48 \neq 0 \rightarrow \text{rk}(C) = 3$$

13.6 Die Inverse einer Matrix

Für eine gegebene Matrix **A** ist die Matrix **X** eine **Inverse** von **A**, wenn gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \text{ und } \mathbf{XA} = \mathbf{I}$$

Die Matrix **A** heißt dann **invertierbar**, die Inverse heißt $\mathbf{A}^{-1}$.

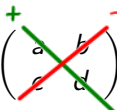
*Sie ist eindeutig
definiert.*

Bemerkung:

AX und **XA** sind nur dann definiert, wenn **A** und **X** quadratisch und derselben Ordnung sind.

Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$


Falls $|\mathbf{A}| = \underline{ad} - \underline{bc} \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix: Beispiel

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ?$$

$$|A| = 2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1 = 12$$

$$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 3 \\ -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} =$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse A^{-1} ist!

Eigenschaften der Inversen

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$ -Matrizen. Dann gilt:

- a) $\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
- b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- c) $\mathbf{A}'$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.
- d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

$$\underbrace{A^{-1}A}_I X = A^{-1}B$$

Falls $|A| \neq 0$, dann gilt:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$YA = B \Leftrightarrow Y = BA^{-1}$$

$$Y \underbrace{AA^{-1}}_I = BA^{-1}$$

Spezialfall:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

Diese Lösung existiert
dann und nur dann
falls A^{-1} existiert.

Determinante, lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

Für eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- ▶ Die Determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$
- ▶ Alle Spalten bzw. Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.
- ▶ Der Rang $rk(\mathbf{A}) = n$
- ▶ Die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.7 Allgemeine Formel für die Inverse

Es sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$ -Matrix und es bezeichne $\text{adj}(\mathbf{A})$ die **Adjunkte** von $\mathbf{A}$, wobei

*Streichmatrix: A ohne Zeile 1
ohne Spalte 2*

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +|\mathbf{A}_{11}| & \dots & -|\mathbf{A}_{k1}| & \dots & +|\mathbf{A}_{n1}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & \dots & +|\mathbf{A}_{k2}| & \dots & -|\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ +|\mathbf{A}_{1n}| & \dots & -|\mathbf{A}_{kn}| & \dots & +|\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ eindeutig bestimmt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) .$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{|A|}} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse: Berechnung durch elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformung:

Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ (und Addieren des Resultats zu einer Zeile).

- ▶ Eine Matrix **A** der Ordnung $n \times n$ mit $|\mathbf{A}| \neq 0$ wird durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umgeformt.
- ▶ Die identischen Zeilenumformungen werden auf die Einheitsmatrix angewendet.
- ▶ Das Ergebnis ist dann die Inverse von **A**.

Beispiel

$$|A| = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ : (-6) \end{array}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot (-2) \end{array}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (ctd.)

Anwendung der gleichen Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix ergibt die Inverse!

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{array}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} : (-6)$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot (-2) \end{array}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel: Probe

Berechne:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ 2 \times 2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}}_{\substack{A^{-1} \\ 2 \times 2}} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} & 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} & 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} :2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} :6$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} :6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot & x = b \\ m \times n & n \times 1 & m \times 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}$: Koeffizientenmatrix der Ordnung $m \times n$

$\mathbf{A}|\mathbf{b}$: erweiterte Koeffizientenmatrix

- Das System ist **lösbar**, falls $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darstellbar ist. Dies ist der Fall, wenn $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Genau eine Lösung, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$.²

Unendlich viele Lösungen, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$.

- **Keine Lösung**, falls $rk(\mathbf{A}) < rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

²(Nur) in diesem Fall gilt $|\mathbf{A}| \neq 0$ und $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

13.12 Quadratische Form

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x}' & & \mathbf{A} & & \mathbf{x} \\ \textcolor{blue}{1 \times n} & & \textcolor{blue}{n \times n} & & \textcolor{blue}{n \times 1} \\ & \textcolor{red}{\swarrow} & & \textcolor{red}{\searrow} & \\ & & \textcolor{red}{1 \times 1} & & \end{array}$$

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbf{A} \mathbf{x} \text{ f\"ur alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$\nearrow$ $\nwarrow$
Zeilenvektor *Spaltenvektor*

Für $n = 2$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

$$\underbrace{(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\substack{2 \times 2 \quad 2 \times 1 \\ 2 \times 1}} = (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 - 6x_2 \\ 1x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$a_{11} = 2 > 0$$

$$|A| = 2 \cdot 3 - (-6) \cdot 1 = 6 + 6 = 12 > 0$$

$\Rightarrow A$ pos. def. (siehe F. 38)

$$= Q(x)$$

$$= x_1(2x_1 - 6x_2) + x_2(x_1 + 3x_2)$$

$$= 2x_1^2 - 6\underline{x_1x_2} + \underline{x_2x_1} + 3x_2^2$$

$$= 2x_1^2 + (-6 + 1)x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$= 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$Q(1, 0) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 2 > 0$$

$\Rightarrow A$ ist nicht negativ definit oder negativ semi definit.

Definitheit von Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt

- ▶ **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ **indefinit**, falls $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:

$\mathbf{A}$ ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel

$$x' P x = \dots$$

Ist die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(semi)definit?

$$\begin{aligned} P(x) &= x' P x = 4 \cdot x_1^2 + (2+2)x_1 x_2 + 1 \cdot x_2^2 \\ &= (2x_1)^2 + 2 \cdot (2x_1) \cdot x_2 + x_2^2 \\ &= (2x_1 + x_2)^2 \geq 0 \quad \text{für alle } x_1, x_2 \end{aligned}$$

$$(2x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = -x_2$$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \leadsto P(-2, 1) = 0$$

P positiv semidefinit.

Definitheit von 2×2 -Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- ▶ positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- ▶ positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$
- ▶ negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- ▶ negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0, a_{22} \leq 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$

indefinit $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| < 0$

Definitheit von 3×3 -Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

- ▶ positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- ▶ (positiv semidefinit)
- ▶ negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| < 0$
- ▶ (negativ semidefinit)

Zusammenfassung

- ▶ Determinanten – der Ordnung 2, 3 und n
- ▶ lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- ▶ Rang einer Matrix
- ▶ Inverse Matrizen
- ▶ Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- ▶ Definitheit von Matrizen