

Determinanten, Inverse und quadratische Formen



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

13.2 Determinanten der Ordnung 3

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

13.6 Die Inverse einer Matrix

13.7 Eine allgemeine Form für die Inverse

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

13.12 Quadratische Formen

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

bzw.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

falls $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$.

$$\det(\mathbf{A})$$

Determinanten der Ordnung 2

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

Der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **determiniert** also, ob

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix **A** und schreiben $\det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

Beispiel 13.1.1

$$\det(A) = |A| = \underline{+ a_{11} \cdot a_{22}} - \underline{a_{12} a_{21}}$$

Die Matrix \mathbf{A} laute

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\mathbf{A}| = 12$

$$= \underline{2 \cdot 3} - \underline{(-6) \cdot 1} = 6 + 6 = 12$$

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow b_1 \cdot 3 - b_2 \cdot (-6) \\ &= 3b_1 + 6b_2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow 2b_2 - 1b_1 = 2b_2 - b_1$$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right| \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Im Beispiel

$$x_1 = \frac{1}{12} (3b_1 + 6b_2) = \frac{b_1 + 2b_2}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{12} (2b_2 - b_1) = \frac{2b_2 - b_1}{12}$$

Beispiel

Berechne mit den Formeln von voriger Folie die Lösung des Gleichungssystems

$$2x_1 - 6x_2 = 4 \quad b_1$$

$$x_1 + 3x_2 = 0 \quad b_2$$

$$x_1 = \frac{b_1 + 2b_2}{4} = \frac{4 + 2 \cdot 0}{4} = 1$$

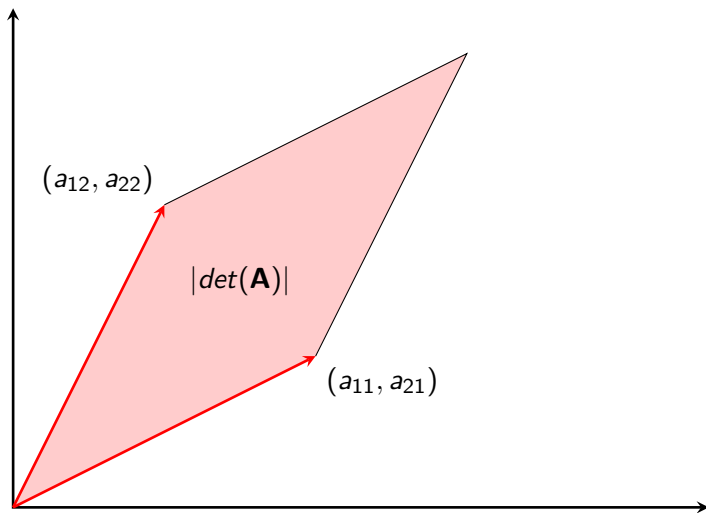
$$x_2 = \frac{2b_2 - b_1}{12} = \frac{2 \cdot 0 - 4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Probe:

$$2 \cdot 1 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 + 2 = 4 \quad \checkmark$$

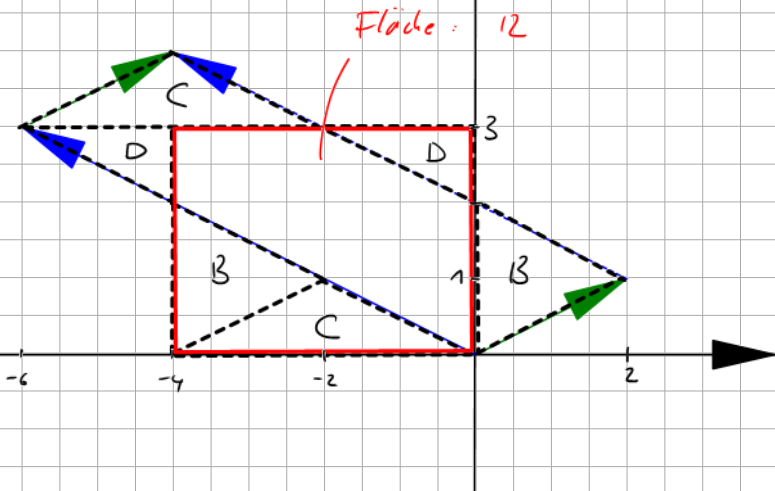
$$1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Geometrische Interpretation der Determinante



$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche: } a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = |\det(A)|$$



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung 3×3 :

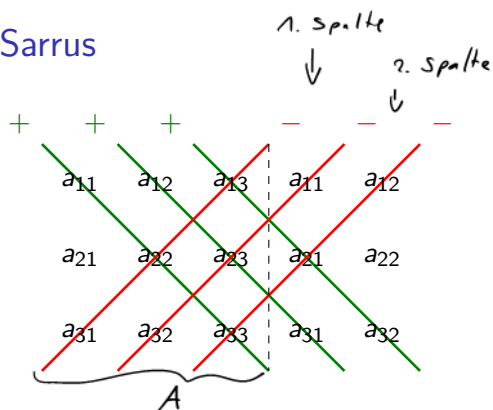
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von \mathbf{A} ist definiert durch:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus



$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Lösung eines 3×3 -Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$).

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$. Dann gilt:

- ▶ Falls \mathbf{A} eine 0-Zeile (oder 0-Spalte) hat, dann $|\mathbf{A}| = 0$.
- ▶ $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- ▶ Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$)
- ▶ Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
- ▶ Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.
- ▶ $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (, wobei \mathbf{B} $n \times n$)

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Streichmatrix \mathbf{A}_{ij} einer Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schachbretvorzeichen:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(-1)^{i+j}$$

Determinante einer Matrix der Ordnung $n \times n$

Die Determinante einer Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$ ist für eine beliebige Zeile i gegeben durch

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

In Summenschreibweise:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Analog für die Festlegung auf eine beliebige Spalte j :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Wähle – falls möglich – eine Zeile i oder Spalte j mit vielen Nullen!

Beispiel $|A| = -0 \cdot |A_{41}| + 0 \cdot |A_{42}| - 0 \cdot |A_{43}| + a_{44} \cdot |A_{44}|$

Wie lautet die Determinante der (Dreiecks-)Matrix \mathbf{A} ?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 & -3 \\ -0 & a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ -0 & 0 & -0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

benutze $i=4$

$$A_{41} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{43} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & -3 \\ 0 & a_{22} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{42} = \begin{pmatrix} a_{11} & 7 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & a_{33} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 \\ 0 & a_{22} & -5 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = -0 \cdot |A_{41}| + 0 \cdot |A_{42}| - 0 \cdot |A_{43}| + a_{44} \cdot |A_{44}|$$

$$A_{44} = \begin{pmatrix} +a_{11} & -2 & +7 \\ -0 & +a_{22} & -5 \\ +0 & -0 & +a_{33} \end{pmatrix} = B$$

$$|B| = |A_{44}| = +0 \cdot |B_{31}| - 0 \cdot |B_{32}| + a_{33} \cdot |B_{33}|$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} + & - \\ a_{11} & 2 \\ - & + \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B_{33}| &= a_{11} \cdot a_{22} - 2 \cdot 0 \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \end{aligned}$$

$$|B| = |A_{44}| = a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{22}$$

$$|A| = a_{44} \cdot |A_{44}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Eine Gruppe von Vektoren gleicher Ordnung sind linear abhängig, falls einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Beispiele

$$\mathbf{a} = (1, -2), \mathbf{b} = (-2, 4)$$

Wegen $\mathbf{b} = -2 \cdot \mathbf{a}$ sind \mathbf{a} und \mathbf{b} linear abhängig.

Im \mathbb{R}^2 liegen \mathbf{a} und \mathbf{b} auf einer Geraden durch den Ursprung.

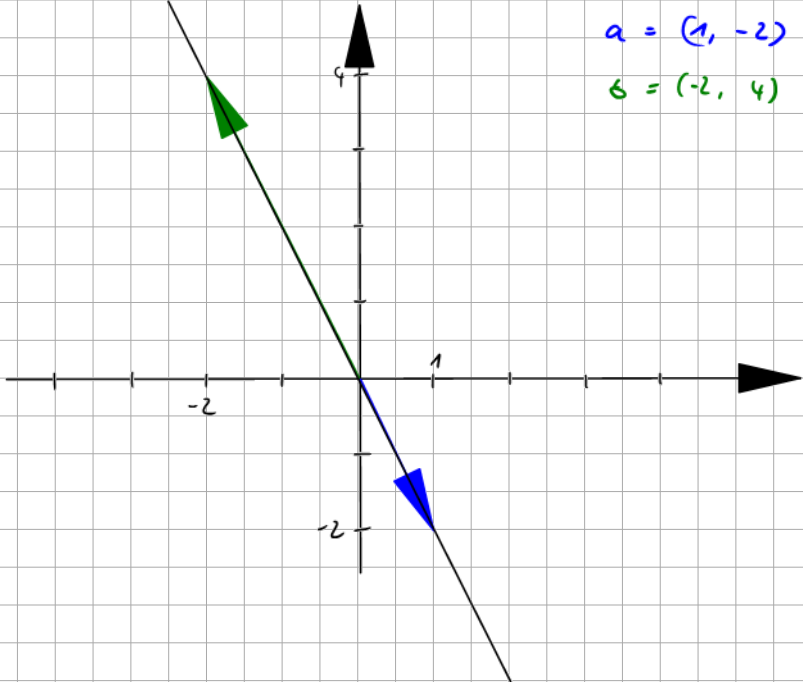
$$\mathbf{c} = (1, -2, 3), \mathbf{d} = (-2, 4, -2), \mathbf{e} = (-1, 2, 1)$$

Wegen $\mathbf{e} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ sind \mathbf{c} , \mathbf{d} & \mathbf{e} linear abhängig.

Im \mathbb{R}^3 liegen \mathbf{c} , \mathbf{d} & \mathbf{e} auf einer Ebene.

$$a = (1, -2)$$

$$b = (-2, 4)$$



Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j}_{\text{Linearkombination}} = \mathbf{0} \Rightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

In Matrix-Schreibweise bedeutet dies für die Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ und den Vektor \mathbf{x} :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

oder äquivalent (Kontraposition):

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$$

Beispiel

Sind die Spaltenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 + (-2) \cdot 2 & 2 + (-2) \cdot 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die Determinante $|\mathbf{P}|$?

$$|\mathbf{P}| = +4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0$$

Noch ein Beispiel

Welche Bedingung muss an $a, c, d, e, f, h \neq 0$ gestellt werden, damit die Spaltenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind?

Wie lautet $|\mathbf{A}|$?

Bemerkungen zu linearer Unabhängigkeit

- ▶ Lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass sich **kein** \mathbf{a}_j als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ darstellen lässt.
- ▶ Andernfalls kann z.B. im Fall $x_1 \neq 0$ der Vektor \mathbf{a}_1 als Linearkombination der übrigen \mathbf{a}_j 's dargestellt werden:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^n x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = - \sum_{j=2}^n \frac{x_j}{x_1} \mathbf{a}_j.$$

- ▶ Es können höchstens n Vektoren $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sein. Beispielsweise sind die n Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Rang einer Matrix

Sei \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Der **Spaltenrang** von \mathbf{A} ist die größte Anzahl linear unabhängiger Spalten von \mathbf{A} .

Der **Zeilenrang** von \mathbf{A} ist die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen von \mathbf{A} .

Der Spaltenrang von \mathbf{A} entspricht immer dem Zeilenrang von \mathbf{A} .

Wir nennen beides daher nur **Rang** der Matrix \mathbf{A} , $rk(\mathbf{A})$.

Rang: Beispiele

Wie lauten die Ränge der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ?$$

13.6 Die Inverse einer Matrix

Für eine gegebene Matrix \mathbf{A} ist die Matrix \mathbf{X} eine **Inverse** von \mathbf{A} , wenn gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \text{ und } \mathbf{XA} = \mathbf{I}$$

Die Matrix \mathbf{A} heißt dann **invertierbar**, die Inverse heißt \mathbf{A}^{-1} .

Bemerkung:

\mathbf{AX} und \mathbf{XA} sind nur dann definiert, wenn \mathbf{A} und \mathbf{X} quadratisch und derselben Ordnung sind.

Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix: Beispiel

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ?$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse \mathbf{A}^{-1} ist!

Eigenschaften der Inversen

Es seien \mathbf{A} und \mathbf{B} invertierbare $n \times n$ -Matrizen. Dann gilt:

- a) \mathbf{A}^{-1} ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
- b) \mathbf{AB} ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
- c) \mathbf{A}' ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.
- d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}$$

Spezialfall:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Determinante, lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

Für eine Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- ▶ Die Determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$
- ▶ Alle Spalten bzw. Zeilen von \mathbf{A} sind linear unabhängig.
- ▶ Der Rang $rk(\mathbf{A}) = n$
- ▶ Die Inverse \mathbf{A}^{-1} existiert.

13.7 Allgemeine Formel für die Inverse

Es sei \mathbf{A} eine $n \times n$ -Matrix und es bezeichne $adj(\mathbf{A})$ die **Adjunkte** von \mathbf{A} , wobei

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & \dots & |\mathbf{A}_{k1}| & \dots & |\mathbf{A}_{n1}| \\ |\mathbf{A}_{12}| & \dots & |\mathbf{A}_{k2}| & \dots & |\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |\mathbf{A}_{1n}| & \dots & |\mathbf{A}_{kn}| & \dots & |\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann ist die Inverse \mathbf{A}^{-1} von \mathbf{A} eindeutig bestimmt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot adj(\mathbf{A}) .$$

Inverse: Berechnung durch elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformung:

Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ (und Addieren des Resultats zu einer Zeile).

- ▶ Eine Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$ mit $|\mathbf{A}| \neq 0$ wird durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umgeformt.
- ▶ Die identischen Zeilenumformungen werden auf die Einheitsmatrix angewendet.
- ▶ Das Ergebnis ist dann die Inverse von \mathbf{A} .

Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (ctd.)

Anwendung der gleichen Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix ergibt die Inverse!

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Probe

Berechne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

Lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

\mathbf{A} : Koeffizientenmatrix der Ordnung $m \times n$

$\mathbf{A|b}$: erweiterte Koeffizientenmatrix

- ▶ Das System ist **lösbar**, falls \mathbf{b} als Linearkombination der Spalten von \mathbf{A} darstellbar ist. Dies ist der Fall, wenn $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A|b})$.

Genau eine Lösung, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A|b}) = n$.²

Unendlich viele Lösungen, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A|b}) < n$.

- ▶ **Keine Lösung**, falls $rk(\mathbf{A}) < rk(\mathbf{A|b})$.

²(Nur) in diesem Fall gilt $|\mathbf{A}| \neq 0$ und $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

13.12 Quadratische Form

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix \mathbf{A} der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Für $n = 2$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Definitheit von Matrizen

Sei \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix \mathbf{A} heißt

- ▶ **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- ▶ **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ **indefinit**, falls \mathbf{x}, \mathbf{y} existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:

\mathbf{A} ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel

Ist die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(semi)definit?

Definitheit von 2×2 -Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- ▶ positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- ▶ positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$
- ▶ negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- ▶ negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0, a_{22} \leq 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$

Definitheit von 3×3 -Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

- ▶ positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- ▶ (positiv semidefinit)
- ▶ negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| < 0$
- ▶ (negativ semidefinit)

Zusammenfassung

- ▶ Determinanten – der Ordnung 2, 3 und n
- ▶ lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- ▶ Rang einer Matrix
- ▶ Inverse Matrizen
- ▶ Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- ▶ Definitheit von Matrizen