

Aufgaben zu Kapitel 4

26.5.26

Die Zufallsvariable

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_j | X)}}$$

ist t -verteilt.
mit $n - k - 1$ Freiheitsgraden

Im Allgemeinen:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim \chi^2_{n-k-1}$$

X, Y unabhängig

$$\rightarrow \frac{X}{\sqrt{Y/(n-k-1)}}$$

t -verteilt mit $n-k-1$ Freiheitsgraden

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_j | X)}}$$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j | X)}}$$

$\sim \mathcal{N}(0, 1)$ Aufgabe 1

$$\frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_j | X)}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j | X)}}$$

$= \sqrt{\frac{y}{n-k-1}}$ Aufgabe 2

1 $V \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_v^2)$

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$z = \frac{\overset{\text{zufällig}}{V} - \overset{\text{fest}}{\mu}}{\underset{\text{fest}}{\sqrt{\sigma_v^2}}} \sim \mathcal{N}(E[z], \text{Var}(z))$

$$\leadsto z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$E[z] = E\left[\frac{V - \mu}{\sqrt{\sigma_v^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2}} E[V - \mu] = \frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2}} (\underbrace{E[V]}_{=\mu} - \mu) = 0$$

$$\text{Var}(z) = \text{Var}\left(\frac{V - \mu}{\sqrt{\sigma_v^2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_v^2}}\right)^2 \cdot \text{Var}(V - \mu) = \frac{1}{\sigma_v^2} \underbrace{\text{Var}(V)}_{=\sigma_v^2} = \frac{1}{\sigma_v^2} \cdot \sigma_v^2 = 1$$

$$\frac{1}{\sigma} u \sim \mathcal{N}(0, I_n)$$

$\uparrow$
 $E[\frac{u}{\sigma}]$

$\nwarrow$
 $\Sigma(\frac{u}{\sigma})$

MLR 6: $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$

$$E\left[\frac{1}{\sigma} \cdot u\right] = \frac{1}{\sigma} \cdot E[u] = \frac{1}{\sigma} \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Sigma\left(\frac{1}{\sigma} \cdot u\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \cdot \Sigma(u) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 \cdot I = I \quad \checkmark$$

2

$$M_x = I - X(X'X)^{-1}X'$$

$$\hat{U} = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} = y - X(X'X)^{-1}X'y$$

$$= \underbrace{\left[I - X(X'X)^{-1}X' \right]}_{M_x} y$$

$$\hat{U} = M_x \cdot y = \dots = M_x \cdot u$$

M_x idempotent
symmetrisch

$$y = X\beta + u$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (M_x u)' M_x u = u' \underbrace{M_x' M_x}_{M_x} u = u' M_x u$$

$$(n-k-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = u' M_x u \frac{1}{\sigma^2}$$

$$= \left(\frac{u}{\sigma} \right)' M_x \frac{u}{\sigma}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \cdot \underbrace{\hat{U}'\hat{U}}_{SSR}$$

$$\left(\frac{U}{\sigma}\right)' \left(\frac{U}{\sigma}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{U_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

$$\left(\frac{U}{\sigma}\right)' M_x \frac{U}{\sigma} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

↑

idempotent symmetrisch

$$\text{rk}(M_x) = n - k - 1 = \text{tr}(M_x)$$

$$\frac{1}{n-k-1} \cdot \vec{v}' \vec{v}$$

$$\text{Also} \quad \left(\frac{U}{\sigma}\right)' \frac{U}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \vec{v}' \vec{v} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot (n-k-1) \cdot \boxed{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

$$(n-k-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

3

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j | x)}}{\sqrt{\text{Var}(\bar{\beta}_j | x)}} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (x'x)^{-1}_{j,j}}}{\sqrt{\sigma^2 (x'x)^{-1}_{j,j}}} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{\sigma^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{(n-k-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}{(n-k-1)}} \sim \chi^2_{n-k-1}$$

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_j | x)}} = \frac{\overset{x}{\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta}_j | x)}}} \sim N(0,1)}{\sqrt{\underbrace{\frac{(n-k-1) \hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}_y / (n-k-1)}}$$

$\sim \chi^2_{n-k-1}$

Als letztes wäre zu zeigen: x & y unabhängig

4

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-209

Abhängige Variable: lsalary

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
$\hat{\beta}_0$ const	4,31171	0,315433	13,67	1,16e-30 ***
$\hat{\beta}_1$ lsales	0,280315	0,0353200	7,936	1,34e-13 ***
$\hat{\beta}_2$ roe	0,0174168	0,00409230	4,256	3,17e-05 ***
$\hat{\beta}_3$ ros	<u>0,000241655</u>	<u>0,000541802</u>	<u>0,4460</u>	<u>0,6561</u>
Mittel abhängige Var.	6,950386	Stdabw. abhängige Var.	0,566374	
Summe quad. Residuen	47,86083	Stdfehler Regression	0,483185	
R-Quadrat	0,282685	Korrigiertes R-Quadrat	0,272188	
F(3, 205)	26,92930	P-Wert(F)	1,00e-14	
Log-Likelihood	-142,5213	Akaike-Kriterium	293,0426	
Schwarz-Kriterium	306,4119	Hannan-Quinn-Kriterium	298,4479	

Abgesehen von Konstante war p-Wert am höchsten für Variable 6 (ros)

Test-Entsch.

$$|t_3| < C$$

$\Rightarrow H_0: \beta_3 = 0$
nicht ablehnen

ros $\nearrow$ 50

$\rightarrow$
salary

$$\nearrow \hat{\beta}_3 \%$$

$$0.00024 \cdot 50$$

$$\approx 0.012 \%$$

$$H_0: \beta_3 = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_3 \sim N(0, \text{Var}(\hat{\beta}_3 | x))$$

Fehlerw'keit : α

suche C sodass

$$t_3 = \frac{\hat{\beta}_3 - 0}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_3)}} \sim t_{205}$$

se($\hat{\beta}_3$)

$$= \underline{0,4460}$$

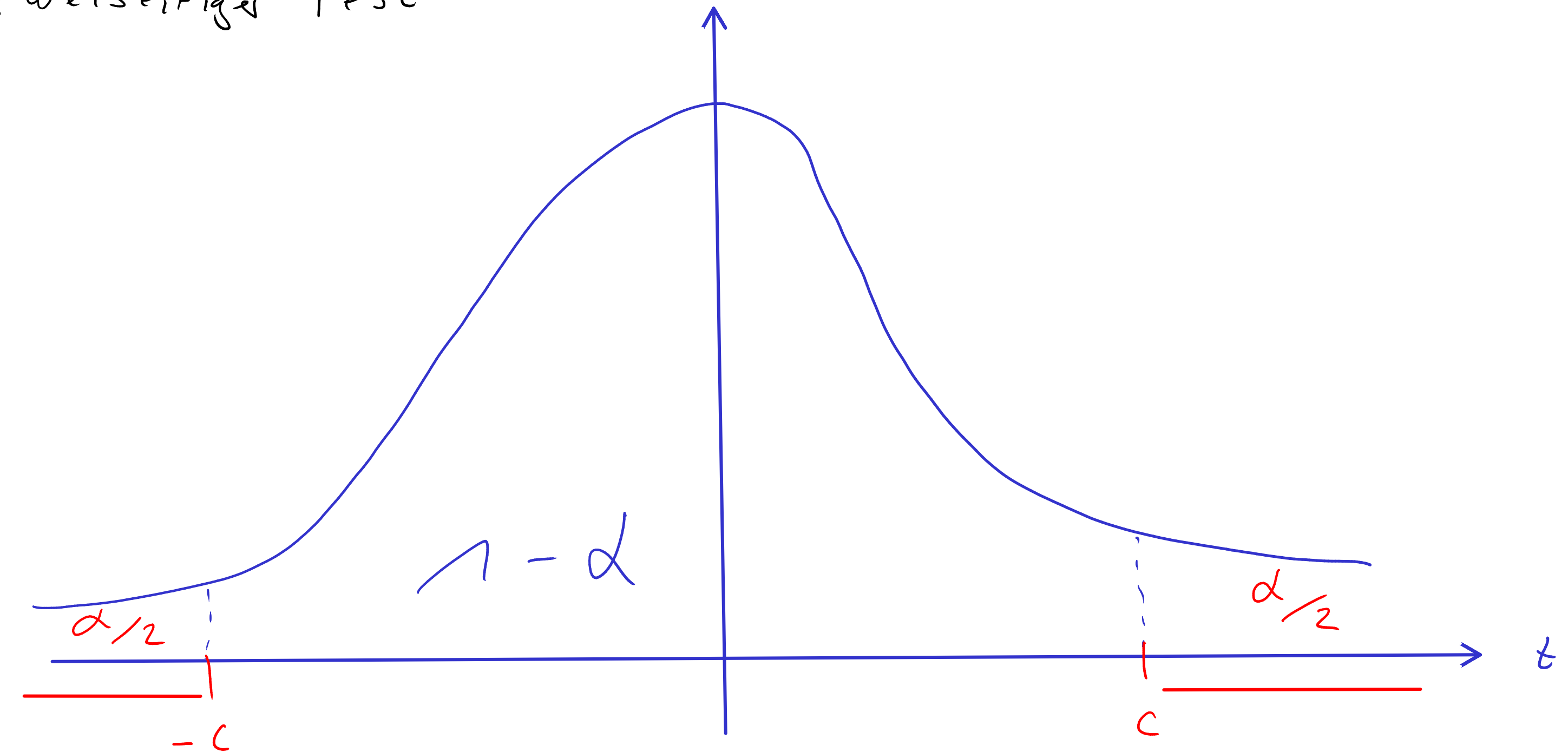
$$\text{Prob}(t_3 \geq C) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Prob}(t_3 < -C) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{Prob}(-C \leq t_3 \leq C) = 1 - \alpha$$

$$C_{t_{120}, 99,5\%} = 2,617$$

$$1,16 e^{-30} = 1,16 \cdot 10^{-30}$$

Zweiseitiger Test



$$1 - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Prob}(t \leq c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

noch

4

Einseitiger test

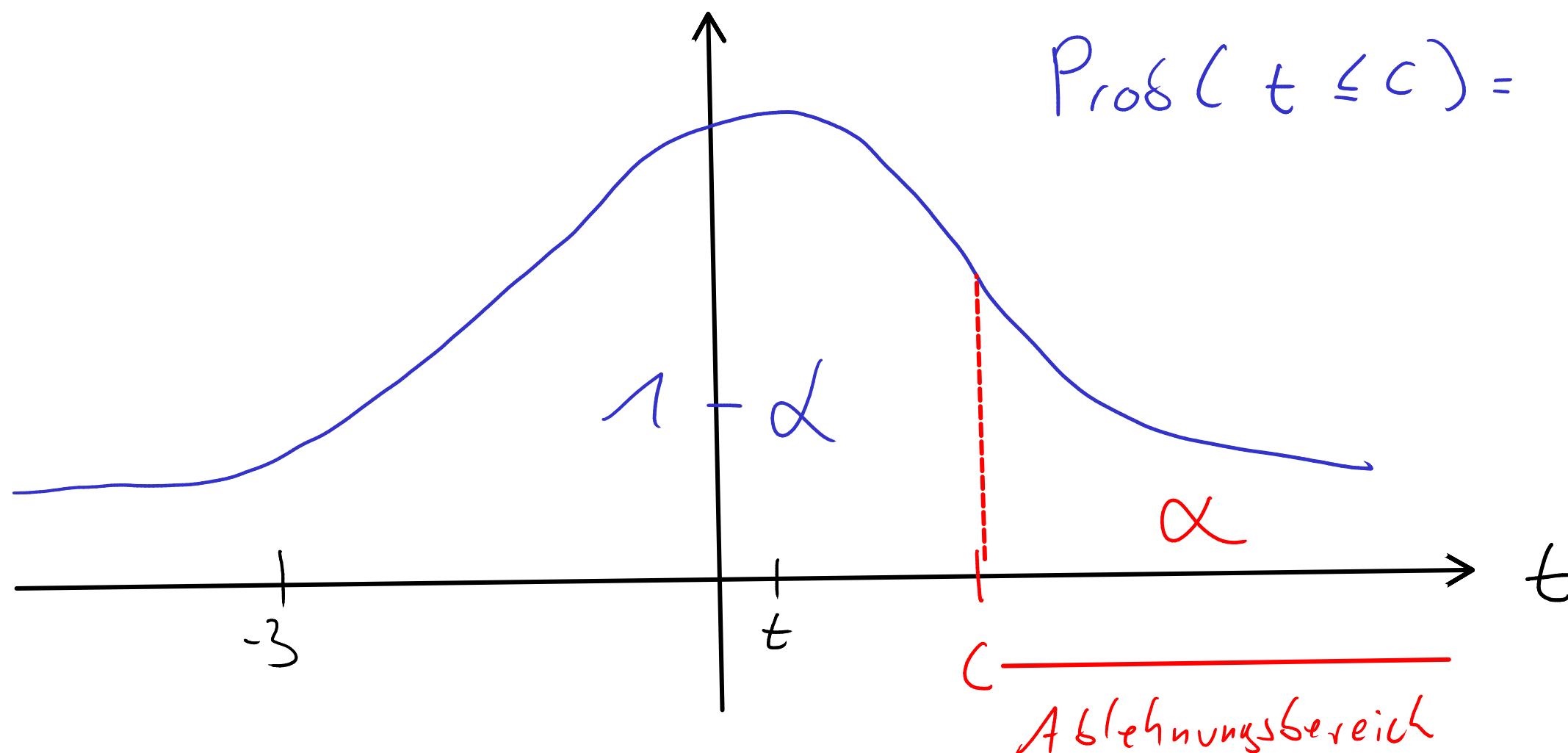
$$\tilde{H}_0: \beta_3 \leq 0$$

$$\tilde{H}_1: \beta_3 > 0$$

$$C_{t_{120}; 99\%} = 2,358$$

$$t_4 = \frac{\hat{\beta}_3 - 0}{se(\hat{\beta}_3)} = 0,44$$

$t_4 < C \rightarrow H_0$ nicht
verwerfen



5

Jahr:	2007	2008	2009	2010	2011
Zeit:	10,03s	9,69s	9,58s	9,82s	9,76s
Jahr:	2012	2013	2014	2015	2016
Zeit:	9,63s	9,77s	9,98s	9,79s	9,81s

$$y_i = \beta_0 + u_i$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} \quad X = L$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \cdot (L' L)^{-1} = \frac{1}{n} \sigma^2$$

$$= (L' L)^{-1} L' y = (n)^{-1} \sum y_i = \bar{y}$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_0) = \frac{1}{n} \hat{\sigma}^2$$

$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - \hat{\beta}_0 = y - \bar{y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \hat{u}' \hat{u}$$

$$\hat{u}' \hat{u} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$\uparrow$
k=0

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$t_0 = \frac{\bar{y} - \gamma}{\sqrt{\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

5

$$\gamma = 9,75$$

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-10
Abhängige Variable: best

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	9,78600	0,0442016	221,4	3,98e-18 ***

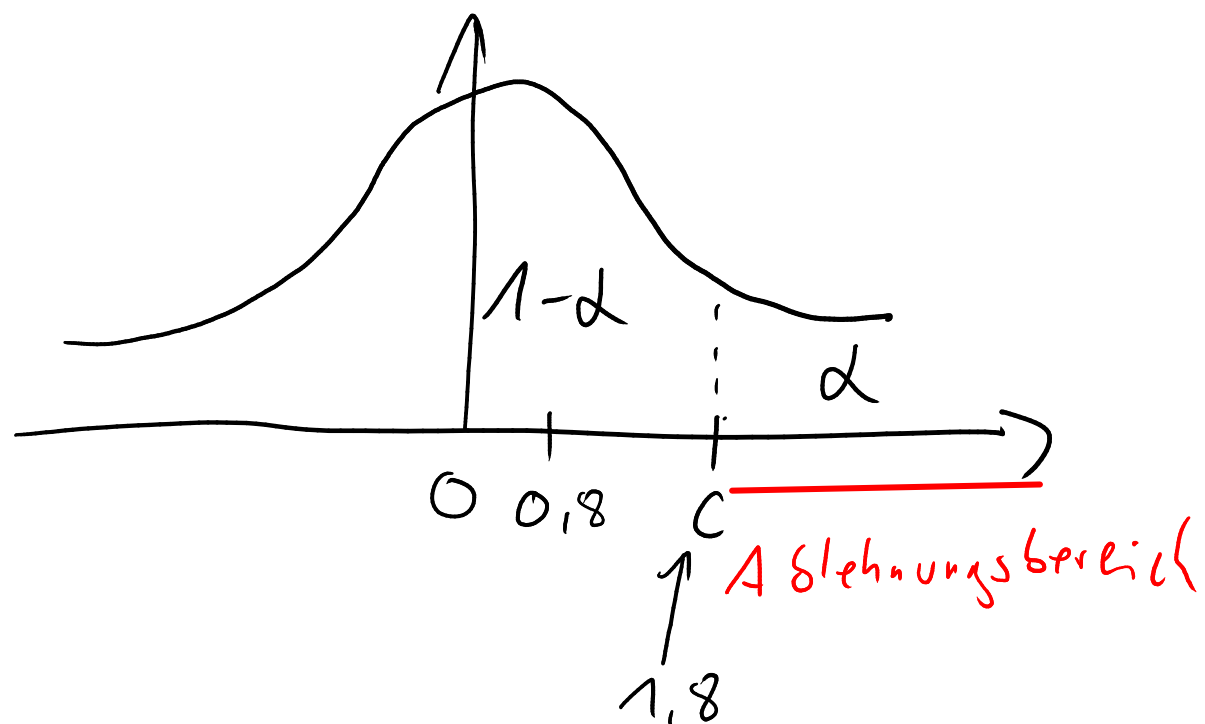
Mittel abhängige Var.	9,786000	Stdabw. abhängige Var.	0,139778
Summe quad. Residuen	0,175840	Stdfehler Regression	0,139778
R-Quadrat	0,000000	Korrigiertes R-Quadrat	0,000000
Log-Likelihood	6,014444	Akaike-Kriterium	-10,02889
Schwarz-Kriterium	-9,726303	Hannan-Quinn-Kriterium	-10,36082

$$H_0: \beta_0 \leq 9,75$$

$$H_1: \beta_0 > 9,75$$

$$t_0 = \frac{9,786 - 9,75}{0,0442016} = \frac{0,036}{0,0442016} = 0,81445$$

← aus Aufgabenstellung

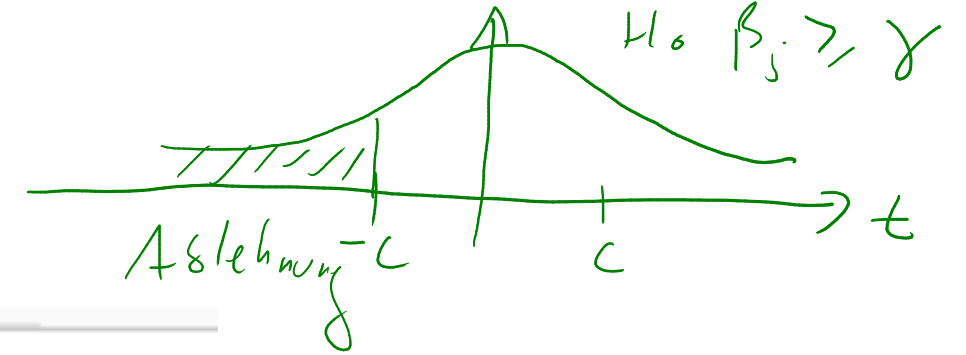
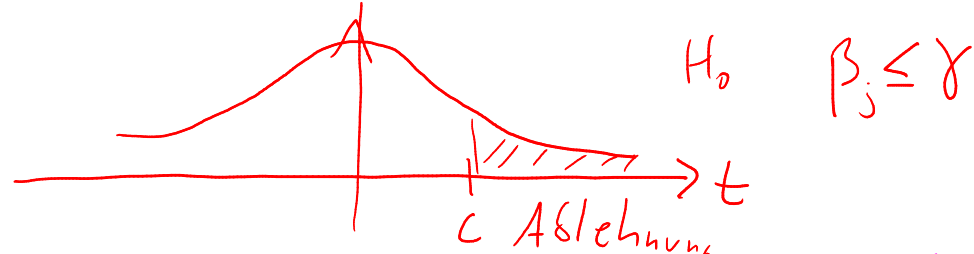


$$C_{t_0; 95\%} = 1,833$$

$$t_0 < C$$

⇒ H_0 nicht ablehnen.

6



$t_2 > -c$ bzw. $|t_2| < c \rightarrow H_0: \beta_2 \geq 0$ nicht ablehnen.

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-10

Abhängige Variable: sleep

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	3191,89	523,581	6,096	0,0005 ***
age	3,23263	12,1996	0,2650	0,7987
earns74	-0,0101339	0,00805387	-1,258	0,2486
Mittel abhängige Var.	3179,100	Stdabw. abhängige Var.	382,7089	
Summe quad. Residuen	1032078	Stdfehler Regression	383,9788	
R-Quadrat	0,217052	Korrigiertes R-Quadrat	-0,006648	
F(2, 7)	0,970283	P-Wert(F)	0,424684	
Log-Likelihood	-71,91189	Akaike-Kriterium	149,8238	
Schwarz-Kriterium	150,7315	Hannan-Quinn-Kriterium	148,8280	

$H_0: \beta_2 \geq 0$ $t_2 = -1,258$, $c = 1,895$

t_2 für $H_0: \beta_2 = 0$ H_0 nicht ablehnen

$$H_0: \beta_1 \geq 5$$

$$t_1 = \dots = -0,15$$

$$c_{t_7; 0,95} = 1,895$$

$$\Rightarrow -c = -1,895$$

$$|t_1| < c$$

$\Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

Warnung: 'sleep' ist bereits der Name einer Funktion

Teststatistik für t-Test:

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j - \gamma}{se(\hat{\beta}_j)}$$

für $j=1$ & $\gamma=5$:

$$t_1 = \frac{3,23 - 5}{12,20} = \frac{-1,77}{12,20} = -0,15$$

$$c_{t_7; 0,975} = 2,365$$

$$H_0: \beta_j = \gamma, \quad H_1: \beta_j \neq \gamma$$

$$|t_j| < c$$

H_0 nicht verwerfen

$$\text{probe } \frac{3,23}{12,20} = 0,26$$

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-706

Abhängige Variable: sleep

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	

const	3158,88	60,8040	51,95	6,74e-243	***
age	3,77270	1,47018	2,566	0,0105	**
earns74	-0,00398946	0,00178855	-2,231	0,0260	**

Mittel abhängige Var.	3266,356	Stdabw. abhängige Var.	444,4134
Summe quad. Residuen	1,37e+08	Stdfehler Regression	441,6639
R-Quadrat	0,015137	Korrigiertes R-Quadrat	0,012336
F(2, 703)	5,402593	P-Wert(F)	0,004694
Log-Likelihood	-5300,195	Akaike-Kriterium	10606,39
Schwarz-Kriterium	10620,07	Hannan-Quinn-Kriterium	10611,68

7

Konfidenzintervall

$$\hat{\beta}_1 = 3,23$$

$$se(\hat{\beta}_1) = 12,20$$

$$\hat{\beta}_2 = -0,01$$

$$se(\hat{\beta}_2) = 0,008$$

$$[\hat{\beta}_j - c \cdot se(\hat{\beta}_j) ; \hat{\beta}_j + c \cdot se(\hat{\beta}_j)] \quad c = 2,365 = c$$

$$C = C_{t_{n-k-1}, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad [3,23 - 2,365 \cdot 12,2 ; 3,23 + 2,365 \cdot 12,2] = [-25,62 ; 32,083]$$

$$[-0,01 - 2,365 \cdot 0,008 ; -0,01 + 2,365 \cdot 0,008] = [-0,029 ; 0,0083]$$

rechtsseitiges Konfidenzintervall

$$[\hat{\beta}_j - \tilde{c} \cdot se(\hat{\beta}_j) ; \infty)$$

$$\hat{\beta}_1 = 3,23$$

$$se(\hat{\beta}_1) = 12,20$$

$$c = 1,895$$

$$\tilde{c} = C_{t_{n-k-1} ; 1-\alpha}$$

$$[3,23 - 1,895 \cdot 12,2 ; \infty) = [-19,89 ; \infty)$$

8

$$n = 184$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

$(se(\hat{\beta}_0)) \qquad (se(\hat{\beta}_1))$

konkret

$$\hat{y} = 574,3 - 2,28x$$

$(10,4) \qquad (0,52)$

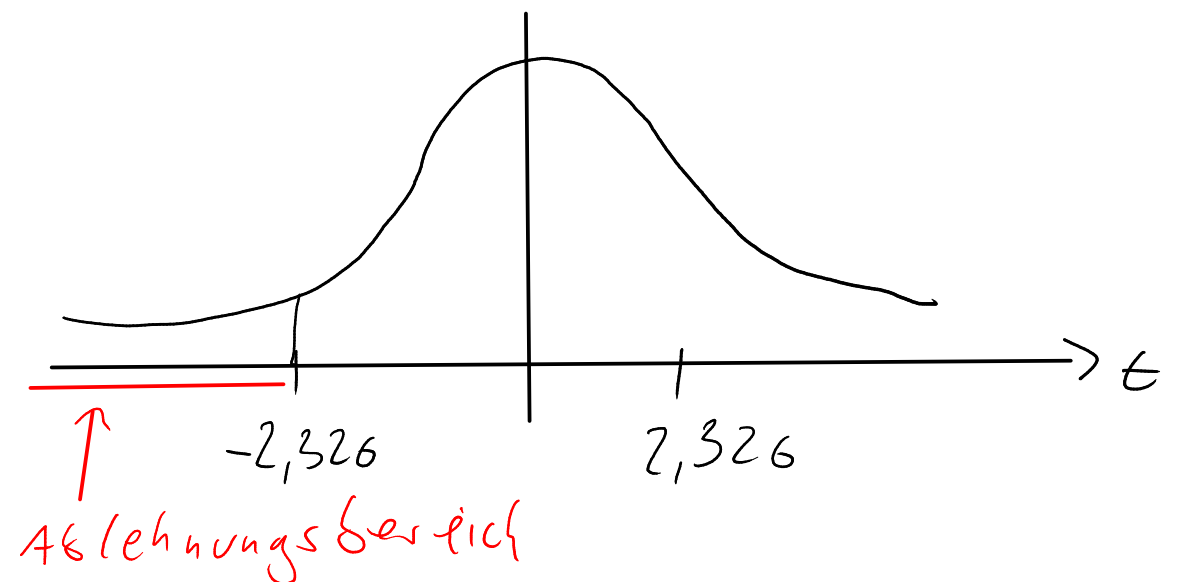
$$R^2 = 0,0955$$

$$H_0: \beta_1 \geq 0 \qquad H_1: \beta_1 < 0$$

$$t_1 = \frac{-2,28 - 0}{0,52} = -4,38$$

$$C_{t_{182, 0,99}} = 2,326$$

Da $t_1 < -C \Rightarrow H_0: \beta_1 \geq 0$ ablehnen



$R^2 \approx 10\%$: nur 10% der Variation von y (Punktzahl)
wird erklärt durch Variation von x
(Klassengröße)

Klassengröße nur ein Faktor von vielen
aber dieser Faktor ist signifikant.

9

$$\widehat{rdintens} = \underset{(1.676)}{0.470} + \underset{(0.046)}{0.050} \cdot profmarg + \underset{(0.216)}{0.321} \cdot lsales \quad (n = 32)$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \log(x)$$

"level-log" - Modell.

wenn x um 1% steigt, dann steigt y um β_1 Einheiten

Hier: wenn sales um 10% steigt, dann steigt
rdintens um 3,21 Prozentpunkte

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 x$$

log-level-Modell

x steigt um 1 Einheit

$\Rightarrow y$ steigt um β_1 %

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x)$$

"log-log-Modell"

β_1 : Elastizität

x steigt um 1 %

$\Rightarrow y$ steigt um β_1 %

Interpretation valide (Approximation genau) falls

Veränderung von x klein!

$x = 1\%$ ✓

$x = 10\%$ ⚠

10

$$\widehat{\text{colGPA}} = 1,3896 - 0,0831 \text{ skipped} + 0,4118 \text{ hsGPA} + 0,0147 \text{ ACT}$$

$(0,3316) \quad (0,0260) \quad (0,0937) \quad (0,0106)$

$$n = 141 \quad \bar{R}^2 = 0,2168 \quad F(3, 137) = 13,919 \quad \hat{\sigma} = 0,32949$$

$$H_0: \beta_{\text{hsGPA}} = 0,4$$

$$\alpha = 5\%$$

$$t_2 = \frac{0,4118 - 0,4}{0,0937} = \frac{0,0118}{0,0937} = 0,1259$$

$$C_{t_{137}, 0,975} \approx 1,97$$

$$|t_2| < C$$

$\Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

$$H_0: \beta_{\text{hsGPA}} = 1 \quad t_2 = \frac{0,4118 - 1}{0,0937} = -6,28$$

$$C_{t_{120}, 0,975} = 1,98$$

$$|t_2| > C$$

$\Rightarrow H_0$ ablehnen

11

$$\widehat{\text{colGPA}} = 1,3896 - 0,0831 \text{ skipped} + 0,4118 \text{ hsGPA} + 0,0147 \text{ ACT}$$

(0,3316) (0,0260) (0,0937) (0,0106)

$$n = 141 \quad \bar{R}^2 = 0,2168 \quad F(3, 137) = 13,919 \quad \hat{\sigma} = 0,32949$$

$$KI_{1-\alpha} = \left[\hat{\beta}_j - c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j); \hat{\beta}_j + c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j) \right]$$

$\uparrow$ $\text{Prob}(\beta_j \in KI_{1-\alpha}) = 1-\alpha$

$$c = c_{t_{n-k-1}, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

hier: $c_{t_{137}, 0,975} \approx 1,98$, $\alpha = 5\%$, $1-\alpha = 95\%$

$$\left[0,4118 - \underbrace{1,98 \cdot 0,0937}_{1,855}; 0,4118 + \underbrace{1,98 \cdot 0,0937}_{1,855} \right]$$

$$= \left[0,2263 \quad ; \quad 0,5973 \right]$$

#12

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2) = ?$$

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \text{Cor}(Y_i, Y_j)$$

$\nwarrow$ Zufallsvariable
 $\uparrow$ Gewichte fest, nicht zufällig

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 \underbrace{\text{Cor}(Y_i, Y_i)}_{\text{Var}(Y_i)} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \text{Cor}(Y_i, Y_j)$$

$$\text{Var}(1 \cdot \hat{\beta}_1 - 3 \hat{\beta}_2) = 1^2 \text{Var}(\hat{\beta}_1) + (-3)^2 \text{Var}(\hat{\beta}_2) + 1 \cdot (-3) \text{Cor}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) + (-3) \cdot 1 \cdot \text{Cor}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1)$$

$$= \text{Var}(\hat{\beta}_1) + 9 \text{Var}(\hat{\beta}_2) - 6 \text{Cor}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

$$\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2)} = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1) + 9\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2) - 6\widehat{\text{Cor}}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)}$$

$$\text{se}(\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2)$$

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2] &= E[\hat{\beta}_1] - 3E[\hat{\beta}_2] \\ &= \beta_1 - 3\beta_2 \stackrel{H_0}{=} 1 \end{aligned}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2 - 1}{\text{se}(\hat{\beta}_1 - 3\hat{\beta}_2)}$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \underline{x_1} + \underline{\beta_2} x_2 + \beta_3 x_3 + u$$

$$-3\beta_2 \underline{x_1} + 3\underline{\beta_2} x_1$$

$$= \beta_0 + \underbrace{(\beta_1 - 3\beta_2)}_{\theta_1} x_1 + \beta_2 \underbrace{(x_2 + 3x_1)}_{z_2} + \beta_3 x_3 + u$$

$$OLS \leadsto \hat{\theta}_1, se(\hat{\theta}_1) \quad t = \frac{\hat{\theta}_1 - 1}{se(\hat{\theta}_1)}$$

$$y = \beta_0 + \underbrace{\theta_1 x_1}_{(\beta_1 - 3\beta_2)x_1} + \beta_2 \overset{?}{\underset{\uparrow}{z_2}} + \beta_3 x_3 + u$$

$$\theta_1 = \beta_1 - 3\beta_2$$

13

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

"Regressormatrix"

$$\leadsto X = L \cdot \beta_0 + U$$

$$\hat{\beta}_0 = (L' L)^{-1} L' \cdot X = (n)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E[X_i]}_{=\mu} = \frac{1}{n} \sum_i \mu = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\text{Var}(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sigma^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1} \cdot \underbrace{\hat{U}' \hat{U}}_{SSR}$$

$$t = \frac{\bar{x} - \gamma}{se(\bar{x})}$$

hier: $k=0$

Falls $|t| > C_{t_{n-1}, 1-\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow$ weise $H_0: \mu = \gamma$ zurück

$$\hat{U}_i = X_i - \hat{\beta}_0 \cdot 1 = x_i - \bar{x}$$

$$\Leftrightarrow \gamma \in KI_{1-\alpha}$$

$$\hat{U}' \cdot \hat{U} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\leadsto \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sqrt{\widehat{Var}(\bar{x})} = \sqrt{\frac{1}{n} \hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = se(\bar{x})$$

$$KI_{1-\alpha} = [\bar{x} - C \cdot se(\bar{x}); \bar{x} + C \cdot se(\bar{x})]$$

$$C = C_{t_{n-1}, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Falls σ^2 bekannt sei $\Rightarrow$ Gaußtest

Teststatistik $g = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n} \sigma^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$KI_{1-\alpha} \left[\bar{X} - c \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sigma^2}, \bar{X} + c \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sigma^2} \right]$$

$$c_{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

14

$$H_0: \beta_2 - \beta_3 = 0$$

Konfidenzintervall

$$\left[\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 - C \cdot \underbrace{se(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}_?, \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 + C \cdot se(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) \right]$$

$$C = C_{t_{n-k-1}; 0,975}$$

$$\begin{array}{r} 0,0153285 \\ - 0,0133748 \\ \hline 0,0019537 \end{array}$$

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-935
Abhängige Variable: lwage

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	5,49670	0,110528	49,73	2,40e-264	***
educ	0,0748638	0,00651245	11,50	1,08e-28	***
exper	0,0153285	0,00336957	4,549	6,10e-06	***
tenure	0,0133748	0,00258720	5,170	2,87e-07	***

Mittel abhängige Var.	6,779004	Stdabw. abhängige Var.		0,421144	
Summe quad. Residuen	139,9610	Stdfehler Regression		0,387729	
R-Quadrat	0,155112	Korrigiertes R-Quadrat		0,152390	
F(3, 931)	56,97386	P-Wert(F)		8,12e-34	
Log-Likelihood	-438,8395	Akaike-Kriterium		885,6790	
Schwarz-Kriterium	905,0412	Hannan-Quinn-Kriterium		893,0619	

$$\ln(\text{wage}) = \beta_0 + \beta_1 \text{educ} + \beta_2 \text{exper} + \beta_3 \text{tenure} + v$$

$$- \beta_3 \text{exper} + \beta_3 \text{exper}$$

$$\ln(\text{wage}) = \beta_0 + \beta_1 \text{educ} + \underbrace{(\beta_2 - \beta_3)}_{\Theta} \text{exper} + \beta_3 \underbrace{(\text{tenure} + \text{exper})}_{z} + v$$

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-935
Abhängige Variable: lwage

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	5,49670	0,110528	49,73	2,40e-264 ***
educ	0,0748638	0,00651245	11,50	1,08e-28 ***
exper	0,00195367	0,00474342	0,4119	0,6805
tenure_exper	0,0133748	0,00258720	5,170	2,87e-07 ***
Mittel abhängige Var.	6,779004	Stdabw. abhängige Var.	0,421144	
Summe quad. Residuen	139,9610	Stdfehler Regression	0,387729	
R-Quadrat	0,155112	Korrigiertes R-Quadrat	0,152390	
F(3, 931)	56,97386	P-Wert(F)	8,12e-34	
Log-Likelihood	-438,8395	Akaike-Kriterium	885,6790	
Schwarz-Kriterium	905,0412	Hannan-Quinn-Kriterium	893,0619	

$$t = \frac{0.00195}{0.00474}$$

$$= 0,411$$

$$= \sqrt{F\text{-Statistik}}$$

aus gretl.

$$KI_{1-\alpha} = \left[\overbrace{0,00195 - C \cdot 0,00474}^{< 0} ; \overbrace{0,00195 + C \cdot 0,00474}^{> 0} \right]$$

$$C_{t_{931}; 0,975} \approx 1,96$$

$H_0: \beta_2 - \beta_3 = 0$ nicht verwerfen!

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-935
 Abhängige Variable: lwage

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	

const	5,49670	0,110528	49,73	2,40e-264	***
educ	0,0748638	0,00651245	11,50	1,08e-28	***
exper	0,0153285	0,00336957	4,549	6,10e-06	***
tenure	0,0133748	0,00258720	5,170	2,87e-07	***
Mittel abhängige Var.	6,779004	Stdabw. abhängige Var.		0,421144	
Summe quad. Residuen	139,9610	Stdfehler Regression		0,387729	
R-Quadrat	0,155112	Korrigiertes R-Quadrat		0,152390	
F(3, 931)	56,97386	P-Wert(F)		8,12e-34	

15

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-141
Abhängige Variable: colGPA

Modell r

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	1,26352	0,333126	3,793	0,0002	***
PC	0,157309	0,0572875	2,746	0,0068	***
hsGPA	0,447242	0,0936475	4,776	4,54e-06	***
ACT	0,00865901	0,0105342	0,8220	0,4125	
Mittel abhängige Var.	3,056738	Stdabw. abhängige Var.	0,372310		
Summe quad. Residuen	15,14868	Stdfehler Regression	0,332527		
R-Quadrat	0,219386	Korrigiertes R-Quadrat	0,202292		
F(3, 137)	12,83426	P-Wert(F)	1,93e-07		

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-141
Abhängige Variable: colGPA

Modell v

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	1,25555	0,335392	3,744	0,0003	***
PC	0,151854	0,0587161	2,586	0,0108	**
hsGPA	0,450220	0,0942798	4,775	4,61e-06	***
ACT	0,00772417	0,0106776	0,7234	0,4707	
fathcoll	0,0417999	0,0612699	0,6822	0,4963	
mothcoll	-0,00375786	0,0602701	-0,06235	0,9504	
Mittel abhängige Var.	3,056738	Stdabw. abhängige Var.	0,372310		
Summe quad. Residuen	15,09400	Stdfehler Regression	0,334376		
R-Quadrat	0,222204	Korrigiertes R-Quadrat	0,193396		
F(5, 135)	7,713451	P-Wert(F)	2,08e-06		

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u) / J}{SSR_u / (n - k - 1)} \quad \leftarrow \text{Anzahl der Restriktionen}$$

$$H_0: \beta_{fatheroll} = 0 \quad , \quad \beta_{motheroll} = 0 \quad \Rightarrow J = 2$$

$$n = 141, \quad k = 5 \quad \leadsto \quad n - k - 1 = 135$$

$$\alpha = ?$$

$$SSR_u = 15,09400$$

$$F = \frac{(15,14868 - 15,09400) / 2}{15,09400 / 135}$$

$$SSR_r = 15,14868$$

$$= 0,244528$$

$$F < C$$

$$C_{F_{2,120}} = 3,07$$

$$C_{F_{2,135}} \approx 3,05$$

$\Rightarrow H_0$ nicht ablehnen

16

a)

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-706

Abhängige Variable: sleep

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	3638,25	112,275	32,40	1,47e-141	***
totwrk	-0,148373	0,0166935	-8,888	5,19e-18	***
educ	-11,1338	5,88457	-1,892	0,0589	*
age	2,19988	1,44572	1,522	0,1285	
Mittel abhängige Var.	3266,356	Stdabw. abhängige Var.	444,4134		
Summe quad. Residuen	1,23e+08	Stdfehler Regression	419,3589		
R-Quadrat	0,113364	Korrigiertes R-Quadrat	0,109575		
F(3, 702)	29,91889	P-Wert(F)	3,28e-18		

Unresting.

"u"

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-706

Abhängige Variable: sleep

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	3586,38	38,9124	92,17	0,0000	***
totwrk	-0,150746	0,0167403	-9,005	1,99e-18	***
Mittel abhängige Var.	3266,356	Stdabw. abhängige Var.	444,4134		
Summe quad. Residuen	1,25e+08	Stdfehler Regression	421,1357		
R-Quadrat	0,103287	Korrigiertes R-Quadrat	0,102014		
F(1, 704)	81,08987	P-Wert(F)	1,99e-18		

resting.

"r"

b)

educ	-11,1338	5,88457
age	2,19988	1,44572

$$t_{educ} = \frac{\hat{\beta}_{educ} - 0}{se(\hat{\beta}_{educ})} = \frac{-11,1338}{5,88457} = -1,892$$

$$H_0: \beta_{educ} = 0$$

$$C_{t_{702; 0,975}} \approx 1,97$$

$$|t| < c$$

$\Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

$$t_{age} = \frac{2,19988}{1,44572} = 1,522$$

$$|t| < c$$

$$H_0: \beta_{age} = 0$$

$\Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

$$c) \quad H_0 \quad \beta_{educ} = 0 \quad \& \quad \beta_{age} = 0$$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u) / J}{SSR_u / (n - k - 1)} \quad C_{F_{2,702}} \approx 3,04$$

$$J = 2, \quad n - k - 1 = 702$$

$$\left. \begin{array}{l} SSR_r = 1,25 \cdot 10^8 \\ SSR_u = 1,23 \cdot 10^8 \end{array} \right\} = \frac{(1,25 - 1,23) / 2}{1,23 / 702} = \frac{0,01}{1,23} \cdot 702$$

$$= \frac{7,02}{1,23} = \frac{702}{123} = 5,707$$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u) / J}{SSR_u / (n - k - 1)}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

$$\frac{SSR}{SST} = 1 - R^2$$

$$= \frac{\left(\underbrace{-1 + \frac{SSR_r}{SST}}_{-R_r^2} + \underbrace{1 - \frac{SSR_u}{SST}}_{R_u^2} \right) / J}{SSR_u / (n - k - 1)}$$

$$\underbrace{\frac{SSR_u}{SST}}_{1 - R_u^2} / (n - k - 1)$$

$$= \frac{(R_u^2 - R_r^2) / J}{(1 - R_u^2) / (n - k - 1)}$$

$$H_0 \quad \beta_{educ} = 0 \text{ und } \beta_{age} = 0$$

$$H_1 \quad \beta_{educ} \neq 0 \text{ oder } \beta_{age} \neq 0$$

$$F = \frac{(R_u^2 - R_r^2) / D}{(1 - R_u^2) / (n - k - 1)}$$

$$D = 2, \quad n - k - 1 = 702 \quad C = 3,04$$

$$\left. \begin{array}{l} R_u^2 = 0,113364 \\ R_r^2 = 0,103287 \end{array} \right\} \Rightarrow F = \frac{(0,113364 - 0,103287) / 2}{(1 - 0,113364) / 702}$$

$$= 3,989 > C$$

H_0 verwerfen!

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & 1 & -1 \\ -1.5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\hat{\text{Var}}(\hat{\beta}_1)$
 $\hat{\text{Var}}(\hat{\beta}_2)$

$$n = 53,$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (SSR = 100)$$

$$\hat{\beta}_1 = 1 \quad \hat{\beta}_2 = -1$$

$$R^2 = SSR / (n - k - 1) = 100 / 50 = 2$$

$$a) \quad H_0 \quad \beta_1 = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{se(\hat{\beta}_1)} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 < c \Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerf.}$$

$$c_{t_{50; 0.975}} = 2.01$$

$$H_0 \quad \beta_2 = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{se(\hat{\beta}_2)} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -0.71$$

$$|t| = 0.71 < c$$

$\Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

b) H_0 $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0 \leadsto F\text{-Test}$

Wald-Statistik

$$W = \frac{(R\hat{\beta} - r)' [R(X'X)^{-1}R']^{-1} (R\hat{\beta} - r)}{\hat{\sigma}^2}$$

$\hat{\sigma}^2$

$\nwarrow \hat{\sigma}^2 / (n - k - 1) = SSR / (n - k - 1)$

Restriktion:

$$0 \cdot \beta_0 + 1 \beta_1 + 0 \cdot \beta_2 = 0$$

$$0 \cdot \beta_0 + 0 \beta_1 + 1 \beta_2 = 0$$

$R\beta$

$$R\hat{\beta} - r = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & 1 & -1 \\ -1.5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R(X'X)^{-1}R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0.5 & -1.5 \\ 0.5 & 1 & -1 \\ -1.5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow W = \frac{(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \quad J=2$$

$\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 - (-1)(-1)}_{=1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} (\sqrt{2})^{-1}$$

$$= (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \left(\sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} / 2$$

$$\hat{\beta}_1 = 1, \quad \hat{\beta}_2 = -1 \quad \Phi(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / 2 = (1, -1) \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} / 2$$

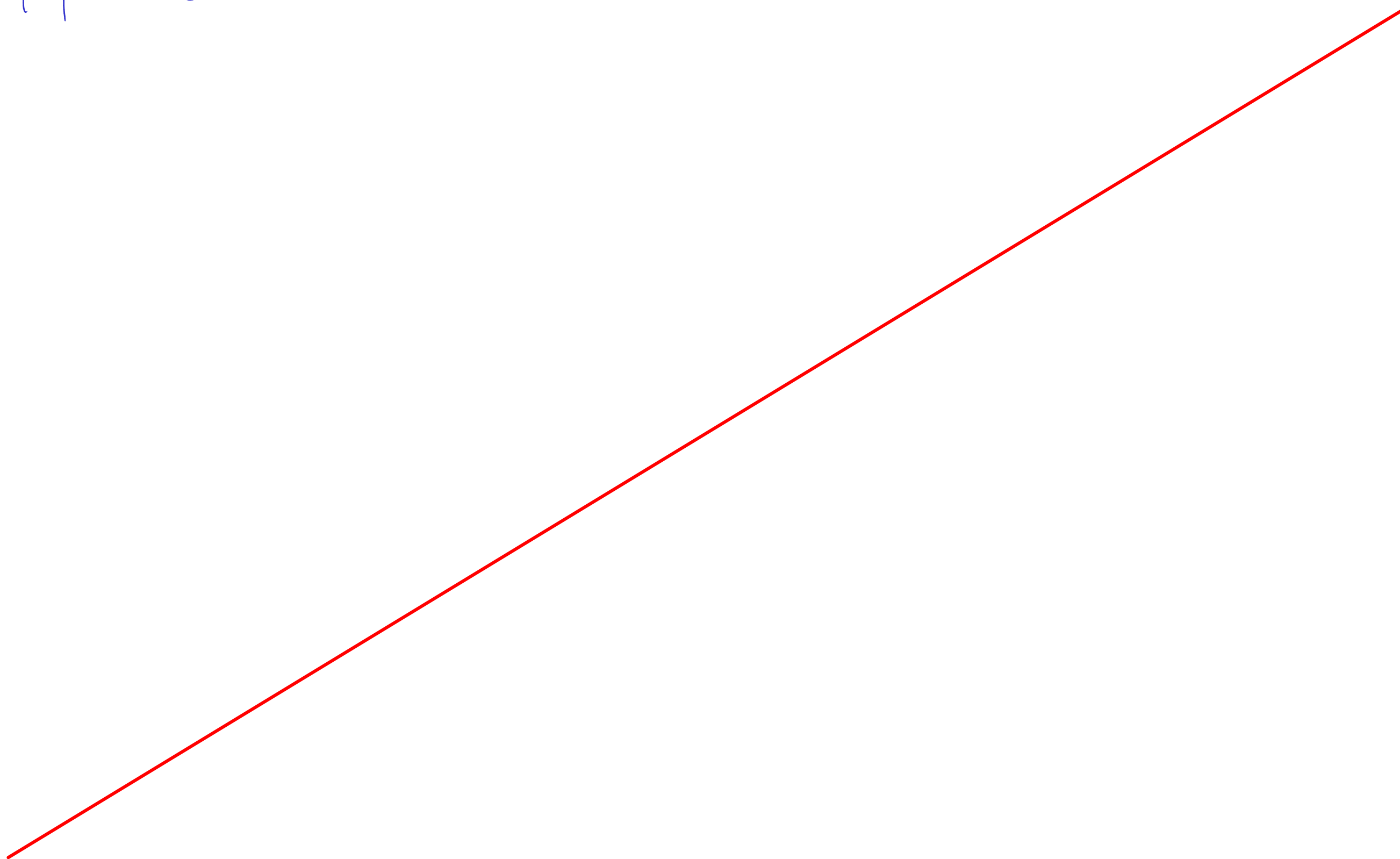
$$= (1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} / 2 = (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0) / 2 = 1/2 = 0,5 < c$$

$H_0: \beta_1 = 0 \text{ und } \beta_2 = 0$
nicht verwerfen

Allgemein: Lasse Regressoren weg

$$(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k, \hat{\beta}_s) \Phi(\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_k, \hat{\beta}_s)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_j \\ \hat{\beta}_k \\ \hat{\beta}_s \end{pmatrix} / 3 = 3 \quad \leadsto \text{Wald-Statistik} \\ = F\text{-Statistik}$$

18



FF 19

$$\widehat{price} = -14,4718 + 0,975554 assess$$

(16,273) (0,049365)

mit $n = 88$, $SSR = 165644,5$ und $R^2 = 0,819531$. Ferner gilt $\sum_{i=1}^n (price_i - assess_i)^2 = 209448,99$.

$$H_0: \beta_0 = 0 \quad \alpha = 5\% \quad t = \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{se(\hat{\beta}_0)} = \frac{-14,4718}{16,273} = -0,889$$

$$C_{t_{86; 0.975}} \approx 1,99 \quad |t| < C \Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen}$$

$$H_0: \beta_1 = 1 \quad t = \frac{\hat{\beta}_1 - 1}{se(\hat{\beta}_1)} = \frac{0,975554 - 1}{0,049365} = -0,495$$

$$|t| < C \Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen}$$

$F > C$
 $H_0: \beta_0 = 0 \text{ \& } \beta_1 = 1$
 verwerfen.

$$\widehat{price} = -14,4718 + 0,975554 \text{ assess}$$

(16,273) (0,049365)

$$\alpha = 1\%$$

mit $n = 88$, $SSR = 165644,5$ und $R^2 = 0,819531$. Ferner gilt

$$\sum_{i=1}^n (price_i - assess_i)^2 = 209448,99.$$

$$C_{F, 2, 86} \approx 4,86$$

$H_0: \beta_0 = 0 \text{ und } \beta_1 = 1 \quad \leadsto \text{F-Test}$

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u) / J = 2}{SSR_u / (n - k - 1)} = \frac{(209448,99 - 165644,5) / 2}{165644,5 / 86} = 11,37$$

Restringiertes Modell: $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1$

$$\widehat{price}_i = assess_i$$

$$price_i = 0 + 1 \cdot assess_i + u_i$$

Residuum: $\widehat{u}_i: price_i - \widehat{price}_i = price_i - assess_i$

$$SSR_r = \sum_{i=1}^n (price_i - assess_i)^2$$

F-Statistik

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_u) / J}{SSR_u / (n - k - 1)}$$

$$= \frac{(R_u^2 - R_r^2) / J}{(1 - R_u^2) / (n - k - 1)}$$

20

$$R_u^2 = 0,829205.$$

$$R_r^2 = 0,819531.$$

Modell u

$$n = 88$$

$$k = 4$$

$$\underbrace{\text{price} = \beta_0 + \beta_1 \text{assess} + \beta_2 \text{lotsize} + \beta_3 \text{sqrtft} + \beta_4 \text{bdrms}}_{\text{Modell r}} + u$$

$$(n - k - 1) = 83$$

Modell r

$$H_0 \quad \beta_2 = 0 \quad \& \quad \beta_3 = 0 \quad \& \quad \beta_4 = 0 \quad J = 3$$

$$F = \frac{(R_u^2 - R_r^2) / J}{(1 - R_u^2) / (n - k - 1)} = \frac{(0,829205 - 0,819531) / 3}{(1 - 0,829205) / 83}$$

$$= 1,567 < 2,71 \Rightarrow H_0 \text{ nicht verworfen.}$$

$$\alpha = 1\%$$

$$C_{F_{3,80}} = 4,01$$

$$\alpha = 5\%$$

$$C_{F_{3,80}} = 2,71$$

Test von Modell 1:

Nullhypothese: Die Regressionskoeffizienten sind Null für die Variablen
lotsize, sqrft, bdrms

Teststatistik: $F(3, 83) = 1,56716$, p-Wert 0,203506

Das Weglassen von Variablen verbesserte 3 von 3 Informationskriterien.

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-88

Abhängige Variable: price

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	-14,4718	16,2734	-0,8893	0,3763
assess	0,975554	0,0493652	19,76	1,00e-33 ***
Mittel abhängige Var.	293,5460	Stdabw. abhängige Var.	102,7134	
Summe quad. Residuen	165644,5	Stdfehler Regression	43,88735	
R-Quadrat	0,819531	Korrigiertes R-Quadrat	0,817432	
F(1, 86)	390,5354	P-Wert(F)	1,00e-33	

$$\text{Var}(y|x)$$

MLR1

$$= \text{Var}(X\beta + u | X)$$

$$= \text{Var}(u | X)$$

MLR5

$$\text{Var}(u | X) = \sigma^2 \cdot \underline{I}$$

Zweite Frage

$$\text{Var}(\text{price} | \text{assess}, \text{lotsize}, \text{sqrft}, \text{bdrms})$$

$$\neq \text{Var}(\text{price})$$

$$\Rightarrow \text{MLR5 ist verletzt}$$
$$\hat{\beta} \text{ erwartungstreu} = \left(\sigma^2 \cdot (X'X)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

aber Test, die $se(\hat{\beta})$ benutzen
sind **nicht** valide

Varianz von U_i : σ_i^2

Schätzer für σ^2 : $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{U}'\hat{U}}{n-k-1}$

Schätzer für $\sigma_i^2 = \hat{U}_i^2$

Regressionsmodell

$$\hat{U}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \text{assess}_i + \alpha_2 \cdot \text{lotsize} + \alpha_3 \cdot \text{sqrft} + \alpha_4 \cdot \text{barmst} + \varepsilon_i$$

$$H_0: \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0$$

#2 1

$$F = \frac{(R_u^2 - R_r^2) / J}{(1 - R_u^2) / (n - k - 1)}$$

$$n = 177$$

$$k = 5$$

$$n - k - 1 = 171$$

R_1^2	R_2^2	R_3^2
0,280858	0,303494	0,352537

Reduktion von 3 auf 2 sinnvoll?
 $H_0: \beta_{ceoten} = 0 \text{ \& } \beta_{comten} = 0$

$$F = 6,476 > C_{F_{2,170}} = 4,79$$

H_0 verwerfen

$$R_r = R_2, R_u = R_3$$

$$\alpha = 1\%$$

3 → 1 ?

$$H_0: \beta_{lnktal} = 0 \text{ \& } \beta_{profmarc} = 0 \text{ \& } \beta_{ceoten} = 0 \text{ \& } \beta_{comten} = 0$$

$$H_1: \neq 0 \text{ odr } \neq 0 \text{ odr } \neq 0 \text{ odr } \neq 0$$

wird impliziert durch $H_1: \beta_{ceoten} \neq 0 \text{ odr } \beta_{comten} \neq 0$
 H_0 verwerfen, da H_0 verworfen wird

Reduktion von 2 auf 1?

$$R_r^2 = R_1^2, \quad R_v^2 = R_2^2$$

$$n = 177$$

$$k = 3$$

$$n - k - 1 = 173$$

$$0,280858$$

$$0,303494$$

$$0,352537$$

$$F = \frac{(0,303494 - 0,280858) / 2}{(1 - 0,303494) / 173} = 2,811$$

$$\alpha = 1\%$$

$$C_F = 4,79$$

$$\alpha = 5\%$$

$$C_F = 3,07$$

$F < C$ H_0 nicht verwerfen.

22

$$\text{voteA} = \beta_0 + \beta_1 \ln(\text{expendA}) + \beta_2 \ln(\text{expendB}) + \beta_3 \text{prtystrA} + u$$

Interpretation β_1

expendA steigt um 1%, dann steigt

voteA um β_1 Prozentpunkte

$$H_0 \quad \beta_1 = -\beta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1 + \beta_2 = 0$$

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-173
Abhängige Variable: voteA

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	45,0789	3,92631	11,48	6,35e-23 ***
lexpendA	6,08332	0,382150	15,92	1,90e-35 ***
lexpendB	-6,61542	0,378820	-17,46	1,09e-39 ***
prtystrA	0,151957	0,0620181	2,450	0,0153 **
Mittel abhängige Var.	50,50289	Stdabw. abhängige Var.	16,78476	
Summe quad. Residuen	10052,14	Stdfehler Regression	7,712335	
R-Quadrat	0,792557	Korrigiertes R-Quadrat	0,788874	
F(3, 169)	215,2266	P-Wert(F)	1,76e-57	

$se(\hat{\beta}_1)$

$se(\hat{\beta}_2)$

$$H_0: \beta_1 + \beta_2 = 0$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)}$$

nicht
angegeben

$$\hat{t} = \frac{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_1) + se(\hat{\beta}_2)}$$

$$Var(x+y) = Var(x) + 2Cor(x,y) + Var(y)$$

$$\leq Var(x) + 2\sqrt{Var(x)} \cdot \sqrt{Var(y)} + Var(y)$$

$$= (\sqrt{Var(x)} + \sqrt{Var(y)})^2$$

$$\sqrt{Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)} \leq se(\hat{\beta}_1) + se(\hat{\beta}_2)$$

$se(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-173

Abhängige Variable: voteA

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	45,0789	3,92631	11,48	6,35e-23 ***
lexpendA	6,08332	0,382150	15,92	1,90e-35 ***
lexpendB	-6,61542	0,378820	-17,46	1,09e-39 ***
prtystrA	0,151957	0,0620181	2,450	0,0153 **
Mittel abhängige Var. 50,50289 Stdabw. abhängige Var. 16,78476				
Summe quad. Residuen 10052,14 Stdfehler Regression 7,712335				
R-Quadrat 0,792557 Korrigiertes R-Quadrat 0,788874				
F(3, 169) 215,2266 P-Wert(F) 1,76e-57				

$$\tilde{t} = \frac{6,08332 - 6,61542}{0,382150 + 0,378820} = -0,699$$

$|\tilde{t}| < c \Rightarrow$ keine Aussage möglich

3 $\rightarrow$ 2

H_0 verwerfen!

3 $\rightarrow$ 1

H_0 verwerfen!

2 $\rightarrow$ 1

H_0 nicht verwerfen

$$\text{Vote } A = \beta_0 + \beta_1 \text{lexpend } A + \beta_2 \text{lexpend } B + \beta_3 \text{prtystr} + U$$

$$+ \beta_2 \text{lexpend } A - \beta_2 \text{lexpend } A$$

$$H_0: \beta_1 + \beta_2 = 0$$

$$\text{Vote } A = \beta_0 + \overbrace{(\beta_1 + \beta_2)}^{\theta} \text{lexpend } A$$

$$+ \underbrace{\beta_2 (\text{lexpend } B - \text{lexpend } A)}_Z$$

$$+ \beta_3 \text{prtystr} + U$$

Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-173

Abhängige Variable: voteA

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	45,0789	3,92631	11,48	6,35e-23 ***
lexpendA	6,08332	0,382150	15,92	1,90e-35 ***
lexpendB	-6,61542	0,378820	-17,46	1,09e-39 ***
prtystrA	0,151957	0,0620181	2,450	0,0153 **
Mittel abhängige Var.	50,50289	Stdabw. abhängige Var.	16,78476	
Summe quad. Residuen	10052,14	Stdfehler Regression	7,712335	
R-Quadrat	0,792557	Korrigiertes R-Quadrat	0,788874	
F(3, 169)	215,2266	P-Wert(F)	1,76e-57	

Modell 3: KQ, benutze die Beobachtungen 1-173

Abhängige Variable: voteA

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert
const	45,0789	3,92631	11,48	6,35e-23 ***
lexpendA	-0,532101	0,533086	-0,9982	0,3196
lexpendB_lexpendA	-6,61542	0,378820	-17,46	1,09e-39 ***
prtystrA	0,151957	0,0620181	2,450	0,0153 **
Mittel abhängige Var.	50,50289	Stdabw. abhängige Var.	16,78476	
Summe quad. Residuen	10052,14	Stdfehler Regression	7,712335	
R-Quadrat	0,792557	Korrigiertes R-Quadrat	0,788874	
F(3, 169)	215,2266	P-Wert(F)	1,76e-57	

$se(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2)$

$$t = -0,998 < c$$

$$H_0: \beta_1 + \beta_2 = 0$$

nicht verwerfen