Vorlesung zu Kapitel 13:[1]

Determinanten, Inverse und quadratische Formen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

13.1 Determinanten der Ordnung 2

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \, , x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \, ,$$

falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Determinanten der Ordnung 2

Der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ **determiniert** also, ob

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

Wir nennen $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ die **Determinante** der Matrix $\mathbf{A}$ und schreiben $det(\mathbf{A})$ oder $|\mathbf{A}|$.

Beispiel 13.1.1

Die Matrix $\mathbf{A}$ laute

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechne $|\mathbf{A}|$!

Berechne ebenfalls die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

Cramer'sche Regel (für $n = 2$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$x_1 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right| \text{ und } x_2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right|$$

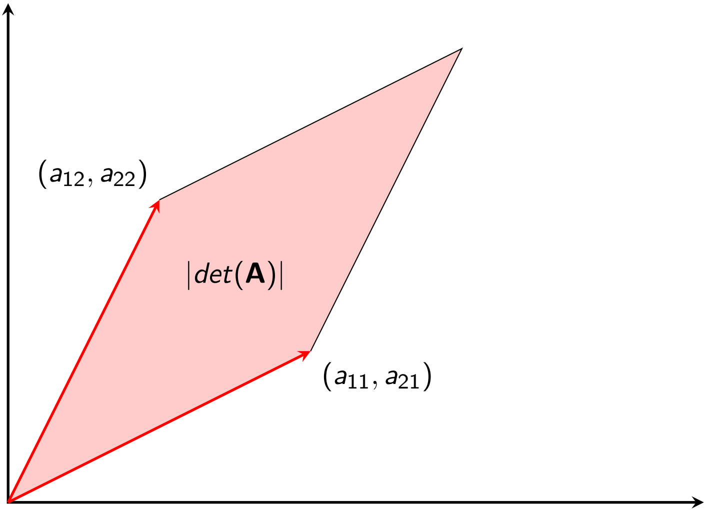
(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$.)

Beispiel

Berechne mit den Formeln von voriger Folie die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation der Determinante



13.2 Determinanten der Ordnung 3

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| \quad = \quad & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & \qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & \qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Wir können uns diese Formel leichter durch die **Regel von Sarrus** merken (siehe nächste Folie).

Die Regel von Sarrus

$$
\begin{array}{ccccccc}
+ & + & + & & - & - & - \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\
&\qquad -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
&\qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})
\end{aligned}
$$

Lösung eines 3×3-Gleichungssystems (Cramer für $n = 3$)

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}, \; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}$$

(falls $|\mathbf{A}| \neq 0$).

13.4 Grundlegende Regeln für Determinanten

Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$. Dann gilt:

- Falls $\mathbf{A}$ eine 0-Zeile (oder 0-Spalte) hat, dann $|\mathbf{A}| = 0$.
- $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
- Wird eine Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl multipliziert, so wird auch $|\mathbf{A}|$ mit dieser Zahl multipliziert. ($\Rightarrow |\alpha\mathbf{A}| = \alpha^n|\mathbf{A}|$)
- Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) vertauscht das Vorzeichen von $|\mathbf{A}|$.
- Addieren des Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) verändert $|\mathbf{A}|$ nicht.
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$ (, wobei $\mathbf{B}$ $n \times n$)

13.5 Entwicklung nach Co-Faktoren

Streichmatrix $\mathbf{A}_{ij}$ einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Schachbrettvorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Determinante einer Matrix der Ordnung $n \times n$

Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ ist für eine beliebige Zeile i gegeben durch

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

In Summenschreibweise:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Analog für die Festlegung auf eine beliebige Spalte j:

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

Wähle – falls möglich – eine Zeile i oder Spalte j mit vielen Nullen!

Beispiel

Wie lautet die Determinante der (Dreiecks-)Matrix $\mathbf{A}$?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 7 & -3 \\ 0 & a_{22} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Eine Gruppe von Vektoren gleicher Ordnung sind linear abhängig, falls einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Beispiele

$$\mathbf{a} = (1, -2),\ \mathbf{b} = (-2, 4)$$

Wegen $\mathbf{b} = -2 \cdot \mathbf{a}$ sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^2$ liegen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ auf einer Geraden durch den Ursprung.

$$\mathbf{c} = (1, -2, 3),\ \mathbf{d} = (-2, 4, -2),\ \mathbf{e} = (-1, 2, 1)$$

Wegen $\mathbf{e} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ sind **c, d** & **e** linear abhängig.

Im $\mathbb{R}^3$ liegen **c, d** & **e** auf einer Ebene.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Rightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

In Matrix-Schreibweise bedeutet dies für die Matrix
$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ und den Vektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

oder äquivalent (Kontraposition):

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Beispiel

Sind die Spaltenvektoren der Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Wie lautet die Determinante $|\mathbf{P}|$?

Noch ein Beispiel

Welche Bedingung muss an $a, c, d, e, f, h \neq 0$ gestellt werden, damit die Spaltenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ d & e & f \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind?

Wie lauted $|\mathbf{A}|$?

Bemerkungen zu linearer Unabhängigkeit

- Lineare Unabhängigkeit bedeutet, dass sich **kein** $\mathbf{a}_j$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ darstellen lässt.
- Andernfalls kann z.B. im Fall $x_1 \neq 0$ der Vektor $\mathbf{a}_1$ als Linearkombination der übrigen $\mathbf{a}_j$'s dargestellt werden:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \sum_{j=2}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = -\sum_{j=2}^{n} \frac{x_j}{x_1} \mathbf{a}_j.$$

- Es können höchstens n Vektoren $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sein. Beispielsweise sind die n Einheitsvektoren $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Rang einer Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Der **Spaltenrang** von $\mathbf{A}$ ist die größte Anzahl linear unabhängiger Spalten von $\mathbf{A}$.

Der **Zeilenrang** von $\mathbf{A}$ ist die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen von $\mathbf{A}$.

Der Spaltenrang von $\mathbf{A}$ entspricht immer dem Zeilenrang von $\mathbf{A}$.

Wir nennen beides daher nur **Rang** der Matrix $\mathbf{A}$, $rk(\mathbf{A})$.

Rang: Beispiele

Wie lauten die Ränge der Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}?$$

13.6 Die Inverse einer Matrix

Für eine gegebene Matrix $\mathbf{A}$ ist die Matrix $\mathbf{X}$ eine **Inverse** von $\mathbf{A}$, wenn gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \text{ und } \mathbf{XA} = \mathbf{I}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt dann **invertierbar**, die Inverse heißt $\mathbf{A}^{-1}$.

Bemerkung:

$\mathbf{AX}$ und $\mathbf{XA}$ sind nur dann definiert, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{X}$ quadratisch und derselben Ordnung sind.

Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben.

Inverse einer Matrix der Ordnung 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix: Beispiel

Wie lautet die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ?$$

Zeige, dass das Ergebnis tatsächlich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist!

Eigenschaften der Inversen

Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen. Dann gilt:

a) $\mathbf{A}^{-1}$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{AB}$ ist invertierbar und $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

c) $\mathbf{A}'$ ist invertierbar und $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

d) $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ für jede Zahl $c \neq 0$.

Lösungen von Gleichungen durch Matrizeninversion

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{BA}^{-1}$$

Spezialfall:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Determinante, lineare Unabhängigkeit, Rang, Inverse

Für eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- Die Determinante $|\mathbf{A}| \neq 0$
- Alle Spalten bzw. Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.
- Der Rang $rk(\mathbf{A}) = n$
- Die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

13.7 Allgemeine Formel für die Inverse

Es sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix und es bezeichne $adj(\mathbf{A})$ die **Adjunkte** von $\mathbf{A}$, wobei

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & \dots & |\mathbf{A}_{k1}| & \dots & |\mathbf{A}_{n1}| \\ |\mathbf{A}_{12}| & \dots & |\mathbf{A}_{k2}| & \dots & |\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |\mathbf{A}_{1n}| & \dots & |\mathbf{A}_{kn}| & \dots & |\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}$$

Falls $|\mathbf{A}| \neq 0$, dann ist die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ eindeutig bestimmt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot adj(\mathbf{A}) \; .$$

Inverse: Berechnung durch elementare Zeilenumformungen

Elementare Zeilenumformung:

Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$ (und Addieren des Resultats zu einer Zeile).

- Eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ mit $|\mathbf{A}| \neq 0$ wird durch elementare Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix umgeformt.
- Die identischen Zeilenumformungen werden auf die Einheitsmatrix angewendet.
- Das Ergebnis ist dann die Inverse von $\mathbf{A}$.

Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (ctd.)

Anwendung der gleichen Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix ergibt die Inverse!

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der ersten Zeile mit minus drei und Addieren auf die zweite Zeile:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit $-\frac{1}{6}$:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{I}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Multiplizieren der zweiten Zeile mit minus 2 und Addieren auf die erste Zeile:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Probe

Berechne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

Lösungen linearer Gleichungssysteme: Charakterisierung

Lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}$: Koeffizientenmatrix der Ordnung $m \times n$
$\mathbf{A}|\mathbf{b}$: erweiterte Koeffizientenmatrix

- Das System ist **lösbar**, falls $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darstellbar ist. Dies ist der Fall, wenn $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

  Genau eine Lösung, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$.[2]

  Unendlich viele Lösungen, falls $rk(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$.

- **Keine Lösung**, falls $rk(\mathbf{A}) < rk(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

[2] (Nur) in diesem Fall gilt $|\mathbf{A}| \neq 0$ und $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

13.12 Quadratische Form

Eine Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **quadratische Form**, falls eine Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ existiert, so dass:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Für $n = 2$:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{aligned}$$

Definitheit von Matrizen

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $n \times n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ heißt

- **positiv definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **positiv semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **negativ definit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$
- **negativ semidefinit**, falls $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **indefinit**, falls $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ existieren mit $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$

Bemerkung:
$\mathbf{A}$ ist negativ (semi)definit, falls $-\mathbf{A}$ positiv (semi)definit ist.

Beispiel

Ist die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(semi)definit?

Definitheit von 2×2-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- positiv semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0, a_{22} \geq 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$
- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| > 0$
- negativ semidefinit $\Leftrightarrow a_{11} \leq 0, a_{22} \leq 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |\mathbf{A}| \geq 0$

Definitheit von 3×3-Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

- positiv definit $\Leftrightarrow a_{11} > 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| > 0$
- (positiv semidefinit)
- negativ definit $\Leftrightarrow a_{11} < 0$ und
  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ und $|\mathbf{A}| < 0$
- (negativ semidefinit)

Zusammenfassung

- Determinanten – der Ordnung 2, 3 und n
- lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Rang einer Matrix
- Inverse Matrizen
- Lösungen von linearen Gleichungssystemen
- Definitheit von Matrizen