Vorlesung zu Kapitel 12:[1]

Matrizenalgebra

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

12.1 Matrizen und Vektoren

Tabelle von Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ hat die **Ordnung** $m \times n$.

Die Einträge a_{ij} der Matrix heißen **Elemente**.

Falls die Matrix nur 1 Zeile hat ($m = 1$): **Zeilenvektor**

Falls die Matrix nur 1 Spalte hat ($n = 1$): **Spaltenvektor**

Falls #Spalten = #Zeilen ($m = n$): **quadratische Matrix**

Beispiel: Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite (Ordnung 2×1):

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×4):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

12.2 Systeme linearer Gleichungen

m Gleichungen in n Unbekannten ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Bezeichnungen:

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: **unbekannte Variablen**

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: **Koeffizienten** des Systems

$b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$: **rechte Seiten**

a_{ij} ist der Koeffizient der j-ten Variablen (x_j) der i-ten Gleichung.

12.3 Matrizenaddition

Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ zwei Matrizen derselben Ordnung sind, definieren wir die **Summe** von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ als die $m \times n$ Matrix $(a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

Damit ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn α eine relle Zahl ist, definieren wir $\alpha\mathbf{A}$ durch

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m\times n} = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

Regeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

Seien **A**, **B** und **C** beliebige $m \times n$ Matrizen und α und β seien relle Zahlen.

Außerdem bezeichne **0** die $m \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, die sogenannte **Nullmatrix**.

Dann gilt:

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
(b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
(c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
(d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
(e) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
(f) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

12.4 Vektorenalgebra

$(1 \times n)$-Zeilenvektor:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$(m \times 1)$-Spaltenvektor:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die Elemente eines Vektors heißen **Komponenten** und sind reelle Zahlen.

Die Anzahl der Komponenten eines Vektors heißt **Dimension**.

Ein n-Vektor ist ein Punkt in $\mathbb{R}^n$.

Operationen auf Vektoren und Linearkombinationen

Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ zwei n-Vektoren und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann heißt der n-Vektor $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ **Linearkombination** von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\begin{matrix}2\\6\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}}$

$\mathbb{R}^2$

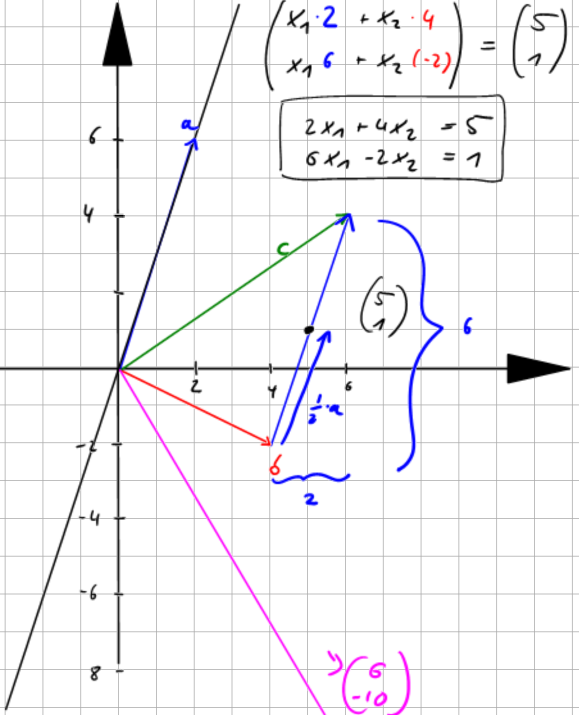
Linearkombinationen

$1\cdot a + 1\cdot b = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = c$

$-a + 2b = \begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\cdot 2 + x_2\cdot 4\\ x_1\, 6 + x_2\,(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}2x_1 + 4x_2 &= 5\\ 6x_1 - 2x_2 &= 1\end{aligned}}$$



$$\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

Gesucht x_1, x_2 mit

$$x_1\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Das innere Produkt oder Skalarprodukt

Das innere Produkt der n-Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Bemerkungen:

- Das innere Produkt ist eine Zahl (ein „Skalar").
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist nur dann definiert, wenn $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die gleiche Dimension haben.

Regeln für das innere Produkt

Falls **a**, **b** und **c** jeweils *n*-Vektoren sind und α ein Skalar ist, dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

(c) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ $\qquad a \cdot a = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_i^2}_{\geq 0} \geq 0$

(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$

(f) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

12.5 Matrizenmultiplikation

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B}$$

Nehme an, dass $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und dass $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ die $m \times p$ Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$, deren Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ ist.

Matrizenmultiplikation

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, **AB** und **BA**!

$$\underset{2\times 2}{B}\ \underset{3\times 2}{A} \quad \text{nicht definiert.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 1\cdot 12 & 2\cdot(-7) + 1(-6) \\ -3\cdot 4 + (-1)12 & -3(-7) + (-1)(-6) \\ 1\cdot 4 + 3\cdot 12 & 1\cdot(-7) + 3\cdot(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}$$

3×2 ✓ 2×2

3×2

Spezialfall: Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad 2 \times 1$

Berechne $\mathbf{Ax}$!

2×1

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_2$$

Gleichungssysteme in Matrizenform: Beispiel

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$
$$6x_1 - 2x_2 = 1$$

$\Leftrightarrow \quad Ax = b$

Definiere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

Definiere für das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

A,**x** und **b** mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Wenn **A**, **B** und **C** Matrizen sind, deren Ordnungen so sind, dass die gegebenen Operationen definiert sind, und wenn α ein beliebiger Skalar ist, dann gilt:

- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$

Vorsicht:

Es gilt im Allgemeinen **nicht**: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$!

Potenzen von Matrizen

Wenn **A** eine quadratische Matrix ist, können wir schreiben:

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2,\ \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3,\ \ldots$$

bzw.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$$

Potenzen von Matrizen: Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ und vermute $\mathbf{A}^n$!

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×2

$$A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ?$$

Die Einheitsmatrix der Ordnung n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Für eine beliebige $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ gilt $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Ebenso gilt für $\mathbf{B}_{n \times m}$: $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

Unterschiede: Produkte von Zahlen und Matrixprodukte

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ Matrizen und α, β und γ Zahlen.

- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

  Aber: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

- $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oder $\beta = 0$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ impliziert nicht, dass $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

- $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ und $\alpha \neq 0$ impliziert $\beta = \gamma$

  Aber: $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ implizieren nicht, dass $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

  $\Leftrightarrow AB - AC = 0$

  $\Leftrightarrow A(B - C) = 0$

12.7 Die Transponierte

Für eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet die $n \times m$-Matrix $\mathbf{A}'$, deren i-te Spalte die i-te Zeile von $\mathbf{A}$ ist, für $i = 1, \ldots, m$, die **Transponierte** von $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponierte: Beispiel

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}^{3\times 2} \qquad \mathbf{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}}^{2\times 2} \qquad \mathbf{AB} = \overbrace{\begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}}^{3\times 2}$$

Berechne $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{B}'$ und $(\mathbf{AB})'$!

Berechne dann $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$!

$$\underset{2\times 3}{A'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 2}{B'} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{(AB)'} = \begin{pmatrix} 20 & -24 & 40 \\ -20 & 27 & -25 \end{pmatrix}$$

$$B' \cdot A' = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4\cdot 2 + 12\cdot 1 & 4\cdot(-3)+12\cdot(-1) & 4\cdot 1 + 12\cdot 3 \\ -7\cdot 2+(-6)\cdot 1 & -7(-3)+(-6)(-1) & -7\cdot 1 + (-6)3 \end{pmatrix}}$$

Regeln für das Transponieren

Gegeben seien Matrizen **A** und **B**, passend für die folgenden Operationen, und gegeben sei ein beliebiger Skalar α. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}')' &= \mathbf{A} \\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})' &= \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \\
(\alpha\mathbf{A})' &= \alpha\mathbf{A}' \\
(\mathbf{A}\mathbf{B})' &= \mathbf{B}'\mathbf{A}'
\end{aligned}
$$

Symmetrische Matrizen

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Eine symmetrische Matrix ist notwendig quadratisch.

Symmetrie: Beispiel

Sei $\mathbf{A}$ eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Zeige, dass $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

$$\big(\underbrace{\underset{n \times m}{A'}\;\underset{m \times n}{A}}_{n \times n}\big)' = A' A'' = A' A$$

Zusammenfassung

- Matrixaddition
- Multiplikation Matrix mit Skalar
- Skalarprodukt: Multiplikation Vektor mit Vektor
- Multiplikation Matrix mit Vektor
- Linearkombination
- Multiplikation Matrix mit Matrix
- Transponierte einer Matrix
- Symmetrie
- Lineare Gleichungssysteme in Matrixnotation