19.5.2025

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

$$\Sigma(z) = \begin{bmatrix} Var(v) & Cov(v,w) \\ Cov(w,v) & Var(w) \end{bmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist positiv definit, falls $x' A x > 0$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$x \neq 0$

Dies ist äquivalent zu alle führenden Hauptminoren > 0

hier: $|Var(v)| > 0 \iff Var(v) > 0$ ✓

$|\Sigma(z)| > 0$

$\iff Var(v) \cdot Var(w) - Cov(w,v) \cdot Cov(v,w) > 0$

$$Var(v) \cdot Var(w) - Cov(w,v) \cdot Cov(v,w) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Var(v) \cdot Var(w) > Cov(v,w)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{Cov(v,w)^2}{Var(v) \cdot Var(w)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \frac{Cov(v,w)}{\sqrt{Var(v)}\sqrt{Var(w)}} > -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > \rho_{vw} > -1$$

$$\frac{Cov(v,w)}{\sqrt{Var(v)} \cdot \sqrt{Var(w)}} = \rho_{v,w}$$

Aufgabe 2

a) ✓

b) $\rho_{faminc, cigs} = -0,17 < 0$

c) d) f) $bwght = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 faminc + u$

```
Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-1388
Abhängige Variable: bwght
```

← n (Stichprobengröße)

$\hat\beta_0$

	Koeffizient	Std.-fehler	t-Quotient	p-Wert	
const	116,974	1,04898	111,5	0,0000	***
cigs	−0,463408	0,0915768	−5,060	4,75e-07	***
faminc	0,0927647	0,0291879	3,178	0,0015	***

$\hat\beta_1$, $\hat\beta_2$

$\sqrt{\widehat{Var}(\hat\beta_j \mid X)}$ $j=0,1,2$

Mittel abhängige Var.	$\bar y =$ 118,6996	Stdabw. abhängige Var.	20,35396
Summe quad. Residuen	557485,5	Stdfehler Regression	20,06282
R-Quadrat	R^2 0,029805	Korrigiertes R-Quadrat	0,028404
F(2, 1385)	21,27392	P-Wert(F)	7,94e-10
~~Log-Likelihood~~	~~−6130,414~~	~~Akaike-Kriterium~~	~~12266,83~~
~~Schwarz-Kriterium~~	~~12282,54~~	~~Hannan-Quinn-Kriterium~~	~~12272,70~~

$\sqrt{\frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar y)^2}_{SST}}$

$\hat\sigma = \sqrt{\hat\sigma^2}$

$\bar R^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1} \cdot \frac{SSR}{SST}$

$\hat u'\hat u = \sum_{i=1}^{n} \hat u_i^2 = SSR$

f) $SST = SSE + SSR$

$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} = \frac{SSE}{SST}$

Interpretation: z.B. $\hat\beta_1$: $cigs \nearrow_{+1} \Rightarrow bwght \nearrow_{+\hat\beta_1}$

R^2: 3% der Variation von bwght werden durch die Variation von cigs & faminc erklärt.

$\hat\sigma$: Maß für die Streuung von u.

f) $20{,}35396 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}_{SST}}$

$n = 1388$

$n - 1 = 1387$

$\Rightarrow 20{,}35396^2 \cdot (n-1) = SST$

$R^2 = 0{,}029805 = \frac{SSE}{SST}$

$\Rightarrow SSE = 0.029805 \cdot SST$

$= 0.029805 \cdot 20{,}35396^2 \cdot 1387 = 17.126{,}30$

Probe $SSE + SSR = 17.126 + 557485 = SST$

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\beta}_j \mid X) = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\overline{x_j x_j} - \overline{x}_j \cdot \overline{x}_j} \cdot \frac{1}{1 - R_j^2}$$

$$\overline{x_j x_j} - \overline{x}_j \cdot \overline{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2$$

R_j^2 Bestimmtheitsmaß der Regression x_j auf alle anderen Regressoren.

$$\widehat{\Sigma}(\hat{\beta}_j \mid X) = \hat{\sigma}^2 \cdot (X'X)^{-1}_{j,j}$$

2g)

```
Modell 2: KQ, benutze die Beobachtungen 1-1388
Abhängige Variable: bwght

             Koeffizient   Std.-fehler   t-Quotient    p-Wert
  ------------------------------------------------------------
  const      119,772        0,572341      209,3        0,0000   ***
  cigs        -0,513772     0,0904909      -5,678      1,66e-08 ***

Mittel abhängige Var.   118,6996   Stdabw. abhängige Var.  20,35396
Summe quad. Residuen    561551,3   Stdfehler Regression    20,12858
R-Quadrat               0,022729   Korrigiertes R-Quadrat  0,022024
F(1, 1386)              32,23524   P-Wert(F)               1,66e-08
Log-Likelihood         -6135,457   Akaike-Kriterium        12274,91
Schwarz-Kriterium       12285,39   Hannan-Quinn-Kriterium  12278,83
```

Aufgabe 6

$$R^2 = \frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}} = 1 - \frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SST}}.$$

:heitsmaß ist definiert als

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-K-1}\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SST}}.$$

$\bar{R}^2 < R^2$

$\Leftrightarrow \quad \cancel{1} + \frac{n-1}{n-k-1}\frac{SSR}{SST} \; \cancel{<} > \; \cancel{1} + \frac{SSR}{SST} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n-k-1}\frac{\cancel{SSR}}{\cancel{SST}} > \frac{\cancel{SSR}}{\cancel{SST}}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n-k-1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-1 > n-k-1 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0$

6b

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} = \frac{SSE}{SST}$$

$$y^* = c_1 L + c_2 y$$

$$SSR^* = \hat{U}^{*\prime} \hat{U}^* = (M_X \cdot y^*)' M_X y^* = (y^*)' M_X' M_X y^*$$

$$= (y^*)' M_X y^* = (c_1 L + c_2 y)' M_X (c_1 L + c_2 y)$$

$$= (c_1 \cdot L)' M_X c_1 \cdot L + (c_1 L)' M_X c_2 y + (c_2 y)' M_X c_1 L + (c_2 y)' M_X c_2 y$$

$$= c_1^2 L' \underbrace{M_X L}_{=0} + c_1 c_2 \underbrace{L' M_X}_{=0} y + c_2 c_1 y' \underbrace{M_X L}_{=0} + c_2^2 y' M_X y$$

$$= c_2^2 y' M_X y = \dots = c_2^2 \hat{U}' \hat{U} = c_2^2 \cdot SSR$$

$$y^* = c_1 1 + c_2 y \qquad \overline{y^*} = c_1 + c_2 \bar{y}$$

$$SST^* = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^* - \overline{y^*}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\cancel{c_1} \cdot 1 + c_2 y_i - \cancel{c_1} - c_2 \bar{y}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(c_2 (y_i - \bar{y}) \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_2^2 (y_i - \bar{y})^2$$

$$= c_2^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = c_2^2 \cdot SST$$

$$R^{*2} = 1 - \frac{SSR^*}{SST^*} = 1 - \frac{c_2^2\, SSR}{c_2^2\, SST} = 1 - \frac{SSR}{SST} = R^2$$

Aufgabe 4 $\qquad z = y + v$

$$\check{\beta} = (X'X)^{-1}X'z = (X'X)^{-1}X'(y+v)$$

$$= \underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} + (X'X)^{-1}X'v$$

a) $$E[\check{\beta}|X] = \underbrace{E[\hat{\beta}|X]}_{=\beta} + E[(X'X)^{-1}X'v|X]$$

$$= \beta + (X'X)^{-1}X'\underbrace{E[v|X]}_{E[v]=0}$$

b) $$\mathbb{V}(\check{\beta}|X) = \dots = (\sigma^2 + \sigma_v^2)(X'X)^{-1}$$