

Aufgabenblatt 5 Ökonometrie MSc im Sommersemester

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{z} = (v, w)'$, worin v und w Zufallsvariablen sind. Zeige, dass

$$\mathbb{V}(z) = \begin{bmatrix} \text{Var}(v) & \text{Cov}(v, w) \\ \text{Cov}(w, v) & \text{Var}(w) \end{bmatrix}$$

ist.

Zeige, unter welchen Bedingungen $\mathbb{V}(z)$ positiv definit ist.

Aufgabe 2

Benutze für diese Aufgabe den Datensatz `bwght.xls`.

Betrachte das ökonometrische Modell

$$bwght = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 faminc + u$$

- Welches Vorzeichen vermutest Du für β_2 ?
- Glaubst du, dass *cigs* und *faminc* korreliert sind? Erkläre, warum die Korrelation positiv oder negativ sein könnte.
- Lade den Datensatz in `gretl` und schätze β_0 , β_1 und β_2 .
- Markiere alle Angaben in der ausgegebenen Tabelle, welche Dir aus Kapitel 3 bekannt sind und interpretiere sie.
- Gebe die von Dir markierten Größen als Formel an.
- Wie lautet SSE?
- Führe die Regression ohne *faminc* durch, vergleiche die Resultate und begründe die Unterschiede.

Aufgabe 3 Benutze den Datensatz `hprice1.xls` für diese Aufgabe.

- Schätze das Modell

$$price = \beta_0 + \beta_1 sqrf t + \beta_2 bdrms + u$$

- Um wie viel steigt der geschätzte Preis eines Hauses, wenn es bei gleicher Fläche (*sqrf t*) ein Schlafzimmer (*bdrms*) mehr hat? Gibt es mit dieser Frage ein Problem?
- Wie viel Prozent der Variation im Preis wird von der Regression erklärt?
- Das erste Haus in der Stichprobe wurde für 300.000\$ verkauft (*price*=300). Berechne das Residuum für dieses Haus. Hat der Käufer/die Käuferin zuviel bezahlt?

Aufgabe 4

Du willst eine lineare Regression $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$ schätzen. Allerdings ist die abhängige Variable \mathbf{y} unbeobachtbar, weil die Daten nur mit Messfehlern erhoben werden. Die gemessenen Daten \mathbf{z} hängen mit der tatsächlichen Variablen \mathbf{y} zusammen gemäß $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$, wobei \mathbf{v} ein Vektor von zufälligen Messfehlern ist. Für diese Messfehler gilt $E[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$ und $\mathbb{V}(\mathbf{v}) = \sigma_v^2 I$. Die Zufallsfehler \mathbf{v} und \mathbf{u} sind unabhängig voneinander und von X . Bis auf die Messfehler erfüllt das Modell alle klassischen Annahmen, insbesondere ist die Spezifikation korrekt und es gilt $E[\mathbf{u}|X] = \mathbf{0}$.

- Du schätzt das Modell mit \mathbf{z} als der abhängigen Variablen mit OLS, und ignorierst dabei zunächst die Messfehler. Gebe die Formel für den Schätzer $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ an.
- Ermittle, ob der unter a) genannte Schätzer erwartungstreu ist.
- Wie lautet die Varianz-Kovarianzmatrix dieses Schätzers?

Aufgabe 5

Betrachte die Schätzung eines Modells mit konstanten Elastizitäten (log-log-modell):

$$\widehat{\ln(y_i)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln(x_i) + \hat{\beta}_2 \ln(z_i), \quad i = 1, \dots, n$$

- Betrachte einen ceteris paribus Anstieg von x um 1% und approximiere den Anstieg der Prognose $\widehat{\ln(y_i)}$.
- Ekläre, warum $\widehat{\ln(y_i^{\text{neu}})} - \widehat{\ln(y_i^{\text{alt}})}$ als prozentualer Anstieg interpretiert werden kann.
- Interpretiere $\hat{\beta}_1$.

Aufgabe 6 Betrachte die Streuungszersetzung:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}_{=\text{SST}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{=\text{SSE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}_{=\text{SSR}}$$

Falls das zugrunde liegende Regressionsmodell eine Konstante enthält, ist das (zentrierte) Bestimmtheitsmaß definiert durch

$$R^2 = \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSR}}{\text{SST}}$$

Das adjustierte Bestimmtheitsmaß ist definiert als

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-K-1} \frac{\text{SSR}}{\text{SST}}$$

- Zeige, dass $\bar{R}^2 < R^2$.
- Zeige, dass sich das R^2 bei einer affin-linearen Transformation von \mathbf{y} , also durch Ersetzen von \mathbf{y} durch $\mathbf{y}^* = c_1 \mathbf{1} + c_2 \mathbf{y}$ mit beliebigen reellen Zahlen c_1 und c_2 , nicht ändert.