

Vorlesung zu Kapitel 12:¹

Matrizenalgebra



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

12.1 Matrizen und Vektoren

12.2 Systeme linearer Gleichungen

12.3 Matrizenaddition

12.4 Vektorenalgebra

12.5 Matrizenmultiplikation

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

12.7 Die Transponierte

12.1 Matrizen und Vektoren

Tabelle von Zahlen mit m **Zeilen** und n **Spalten**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ hat die **Ordnung** $m \times n$.

Die Einträge a_{ij} der Matrix heißen **Elemente**.

Falls die Matrix nur 1 Zeile hat ($m = 1$): **Zeilenvektor**

Falls die Matrix nur 1 Spalte hat ($n = 1$): **Spaltenvektor**

Falls $\#$ Spalten = $\#$ Zeilen ($m = n$): **quadratische Matrix**

Beispiel: Lineares Gleichungssystem

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×3):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite (Ordnung 2×1):

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix (Ordnung 2×4):

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

12.2 Systeme linearer Gleichungen

m Gleichungen in n Unbekannten ($m, n \in \mathbb{N}$):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Bezeichnungen:

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$: **unbekannte Variablen**

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: **Koeffizienten** des Systems

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$: **rechte Seiten**

a_{ij} ist der Koeffizient der j -ten Variablen (x_j) der i -ten Gleichung.

12.3 Matrizenaddition

Wenn $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$ zwei Matrizen derselben Ordnung sind, definieren wir die **Summe** von \mathbf{A} und \mathbf{B} als die $m \times n$ Matrix $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Damit ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn α eine reelle Zahl ist, definieren wir $\alpha\mathbf{A}$ durch

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij})_{m \times n} = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$$

Regeln für Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

Seien \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} beliebige $m \times n$ Matrizen und α und β seien reelle Zahlen.

Außerdem bezeichne $\mathbf{0}$ die $m \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, die sogenannte **Nullmatrix**.

Dann gilt:

$$(a) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$(b) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(c) \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$(d) \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$(e) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$$

$$(f) \quad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$$

12.4 Vektorenalgebra

$(1 \times n)$ -Zeilenvektor:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$(m \times 1)$ -Spaltenvektor:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Die Elemente eines Vektors heißen **Komponenten** und sind reelle Zahlen.

Die Anzahl der Komponenten eines Vektors heißt **Dimension**.

Ein n -Vektor ist ein Punkt in \mathbb{R}^n .

Operationen auf Vektoren und Linearkombinationen

Seien \mathbf{a}, \mathbf{b} zwei n -Vektoren und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann heißt der n -Vektor $t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ **Linearkombination** von \mathbf{a} und \mathbf{b} .

$$t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta_1 + sb_1 \\ ta_2 + sb_2 \\ \vdots \\ ta_n + sb_n \end{pmatrix}$$

Das innere Produkt oder Skalarprodukt

Das innere Produkt der n -Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Bemerkungen:

- ▶ Das innere Produkt ist eine Zahl (ein „Skalar“).
- ▶ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist nur dann definiert, wenn \mathbf{a} und \mathbf{b} die gleiche Dimension haben.

Regeln für das innere Produkt

Falls \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} jeweils n -Vektoren sind und α ein Skalar ist, dann gilt:

$$(a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(b) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$(c) (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(d) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$$

$$(e) \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$(f) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

12.5 Matrizenmultiplikation

Nehme an, dass $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ und dass $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n \times p}$.

Dann ist das Produkt $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ die $m \times p$ Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}$, deren Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte das innere Produkt

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

der i -ten Zeile von \mathbf{A} und der j -ten Spalte von \mathbf{B} ist.

Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Matrizenmultiplikation

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Berechne, falls möglich, \mathbf{AB} und \mathbf{BA} !

Spezialfall: Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Berechne \mathbf{Ax} !

Gleichungssysteme in Matrizenform: Beispiel

$$2x_1 + 4x_2 = 5$$

$$6x_1 - 2x_2 = 1$$

Definiere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise

Definiere für das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

A, **x** und **b** mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

12.6 Regeln für Matrizenmultiplikation

Wenn \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} Matrizen sind, deren Ordnungen so sind, dass die gegebenen Operationen definiert sind, und wenn α ein beliebiger Skalar ist, dann gilt:

- ▶ $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- ▶ $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- ▶ $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- ▶ $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$

Vorsicht:

Es gilt im Allgemeinen **nicht**: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$!

Potenzen von Matrizen

Wenn \mathbf{A} eine quadratische Matrix ist, können wir schreiben:

$$\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{AAA} = \mathbf{A}^3, \quad \dots$$

bzw.

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{n \text{ mal}}$$

Potenzen von Matrizen: Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne \mathbf{A}^2 , \mathbf{A}^3 und vermute \mathbf{A}^n !

Die Einheitsmatrix der Ordnung n

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Für eine beliebige $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} gilt $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Ebenso gilt für $\mathbf{B}_{n \times m}$: $\mathbf{I}_n\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Die Einheitsmatrix ist die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft.

Unterschiede: Produkte von Zahlen und Matrixprodukte

Seien **A**, **B** und **C** Matrizen und α , β und γ Zahlen.

▶ $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Aber: **AB** \neq **BA**

▶ $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oder $\beta = 0$

Aber: **AB** = **0** impliziert nicht, dass **A** = **0** oder **B** = **0**

▶ $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ und $\alpha \neq 0$ impliziert $\beta = \gamma$

Aber: **AB** = **AC** und **A** \neq **0** implizieren nicht, dass **B** = **C**.

12.7 Die Transponierte

Für eine $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} bezeichnet die $n \times m$ -Matrix \mathbf{A}' , deren i -te Spalte die i -te Zeile von \mathbf{A} ist, für $i = 1, \dots, m$, die **Transponierte** von \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponierte: Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -24 & 27 \\ 40 & -25 \end{pmatrix}$$

Berechne \mathbf{A}' und \mathbf{B}' und $(\mathbf{AB})'$!

Berechne dann $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$!

Regeln für das Transponieren

Gegeben seien Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} , passend für die folgenden Operationen, und gegeben sei ein beliebiger Skalar α . Dann gilt:

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

$$(\alpha\mathbf{A})' = \alpha\mathbf{A}'$$

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$$

Symmetrische Matrizen

Die Matrix **A** ist **symmetrisch** $\Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}'$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Eine symmetrische Matrix ist notwendig quadratisch.

Symmetrie: Beispiel

Sei \mathbf{A} eine Matrix der Ordnung $m \times n$.

Zeige, dass $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

Zusammenfassung

- ▶ Matrixaddition
- ▶ Multiplikation Matrix mit Skalar
- ▶ Skalarprodukt: Multiplikation Vektor mit Vektor
- ▶ Multiplikation Matrix mit Vektor
- ▶ Linearkombination
- ▶ Multiplikation Matrix mit Matrix
- ▶ Transponierte einer Matrix
- ▶ Symmetrie
- ▶ Lineare Gleichungssysteme in Matrixnotation