Vorlesung zu Kapitel 10:[1]

Integration

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Integralrechnung

Von welcher Funktion F ist eine gegebene Funktion f die Ableitung?

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften:

- Maß für Handelsgewinne von Konsument:innen
- Maß für Kosten und Gewinne von Firmen
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ...

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f eine stetige und F eine differenzierbare Funktion.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

$\int$: **Integralzeichen**
$f(x)$: **Integrand**
x: **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)
C: **Integrationskonstante**

Einige wichtige Integrale

Probe: $\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C\right)'$

$= \cancel{(r+1)}\frac{1}{\cancel{r+1}}x^{r+\cancel{1}-\cancel{1}} = x^r$

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int \underbrace{x^r}_{f(x)} dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)?$

Beispiele:

$r=1$

$$\int x^1 dx = \frac{1}{2}\cdot x^2 + C$$

$r=-3$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$r=\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\frac{dF(x)}{dx} = 2\cdot\frac{1}{2}x^1 = x$

$F(x) = x^0 = 1$

$\Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = 0 \neq x$

Grundlegende Integrationsregeln

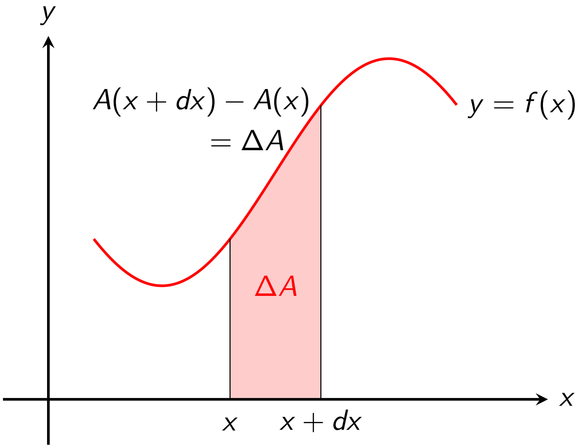
Wie bei Summen gilt:

$$\int af(x)\ dx = a \int f(x)\ dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

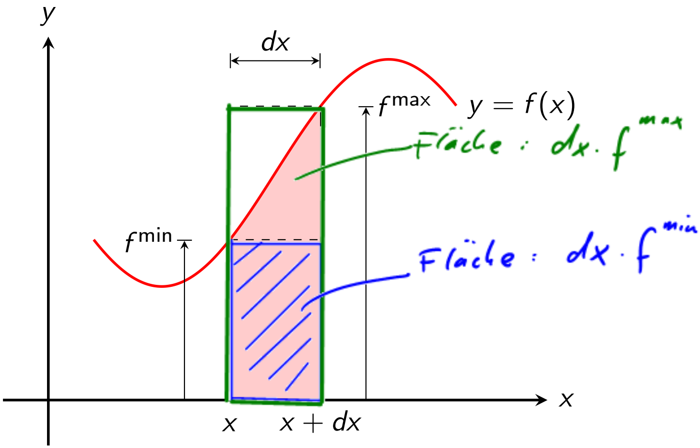
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

ΔA: Fläche unter f (stetig, ≥ 0) auf dem Intervall $[x, x + dx]$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Die Fläche ΔA zwischen $[x, x + dx]$ ist **mindestens** so groß wie $dx \cdot f^{\text{min}}$ und **höchstens** so groß wie $dx \cdot f^{\text{max}}$:

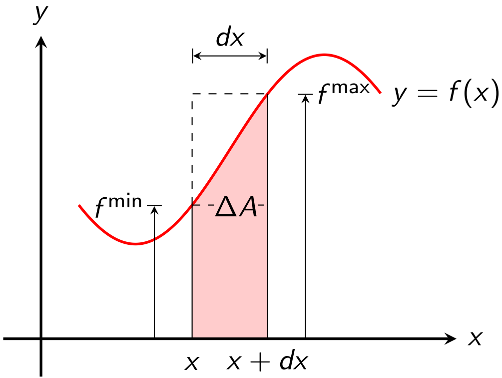


10.2 Flächen und bestimmte Integrale

$$\boxed{dx \cdot f^{min}} \leq \Delta A < \boxed{dx \cdot f^{max}}$$

Es gilt also

$$f^{\min} \leq \frac{\Delta A}{dx} \leq f^{\max}$$



Fläche als unbestimmtes Integral

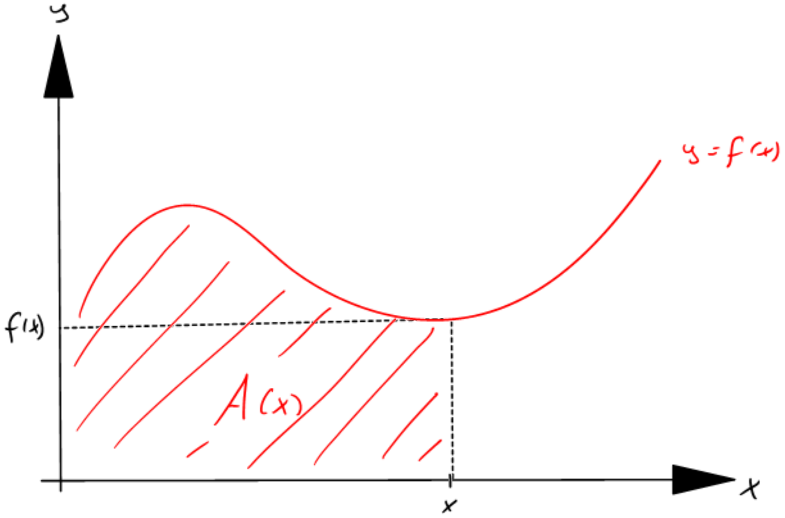
$$\frac{A(x+dx) - A(x)}{dx}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & f^{\text{min}} & \leq & \frac{\Delta A}{dx} & \leq & f^{\text{max}} \\
dx \to 0: & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & f(x) & \leq & A'(x) & \leq & f(x)
\end{array}$$

Damit gilt $A'(x) = f(x)$ und:

$$A(x) = \int f(x)dx + C$$

Die Fläche A ist also ein unbestimmtes Integral der Funktion f.



$$A'(x) = f(x)$$

Beispiel $\quad f(x) = 2x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

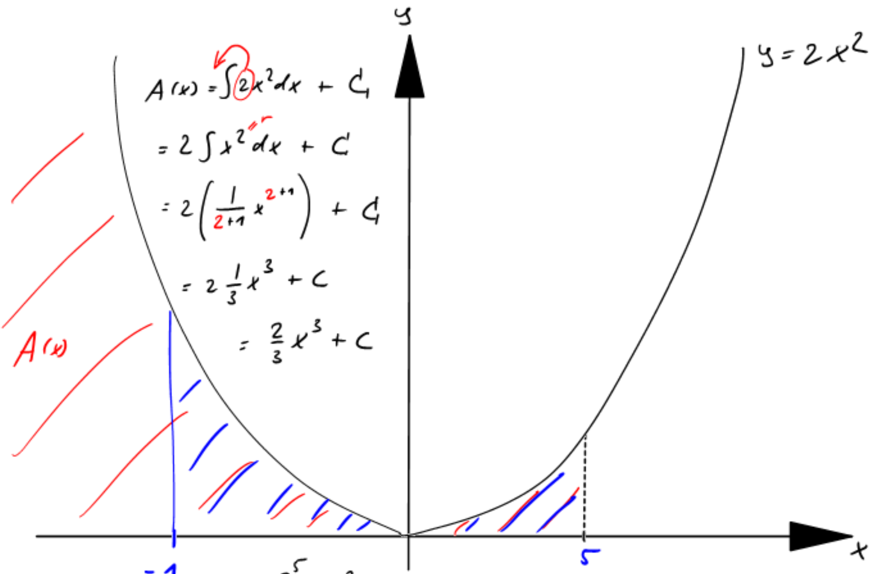
$$A(x) = \int 2x^2\,dx + C_1$$

$$= 2\int x^{\overset{=r}{2}}\,dx + C$$

$$= 2\left(\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right) + C_1$$

$$= 2\,\frac{1}{3}x^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + C$$



$$\int_{-1}^{5} \underbrace{2x^2}_{f}\,dx = F(5) - F(-1)$$

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion und sei F die Stammfunktion von f.

Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$.

Das bestimmte Integral bezeichnen wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx = \Big|_a^b F(x) \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere** **Integrationsgrenze**.

für $f(x) = 2x^2$: $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = F(5) - F(-1)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 5^3 + C - \left(\frac{2}{3}(-1)^3 + C\right)$$

$$= \frac{2}{3}125 - \frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3}125 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}126$$

$$= 2 \cdot 42 = 84$$

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

$a \leq b$

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ für $a < c < b$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

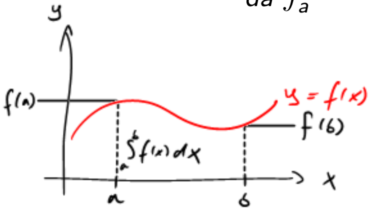
Sei f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F.

Dann gilt:

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = F'(b) = f(b)\ .$$

Ebenso gilt:

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)dx = -F'(a) = -f(a)\ .$$



$$\int_a^{g(t)} f(x)\,dx = F(g(t)) - F(a)$$

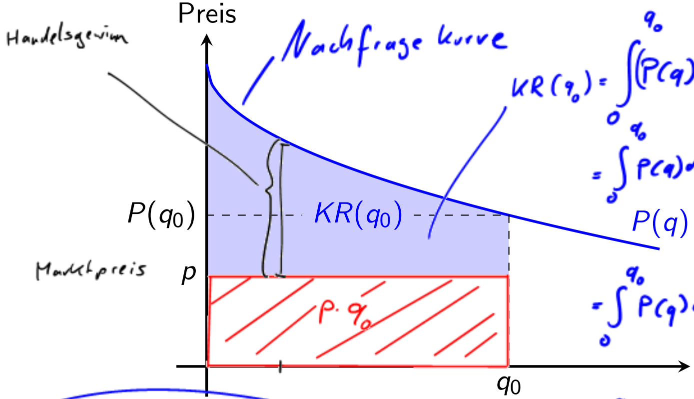
$$\frac{d\left(\int_a^{g(t)} f(x)\,dx\right)}{dt} = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

10.4 Ökonomische Anwendungen

- Konsumentenrente
- Kosten
- Produzentenrente
- Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswerte

Konsumentenrente KR

$P(q)$: inverse Nachfragefunktion



$$KR(q_0) = \int_0^{q_0} \left(P(q) - p\right) dq$$

$$= \int_0^{q_0} P(q)\,dq + \int_0^{q_0} (-p)\,dq$$

$$= \int_0^{q_0} P(q)\,dq - p \int_0^{q_0} \overset{q^0}{1}\,dq$$

$$= \int_0^{q_0} P(q)\,dq - p \left[\frac{1}{0+1} \cdot q^{0+1}\right]_0^{q_0}$$

$$\int_0^{q_0} P(q)\,dq - p(q_0 - 0)$$

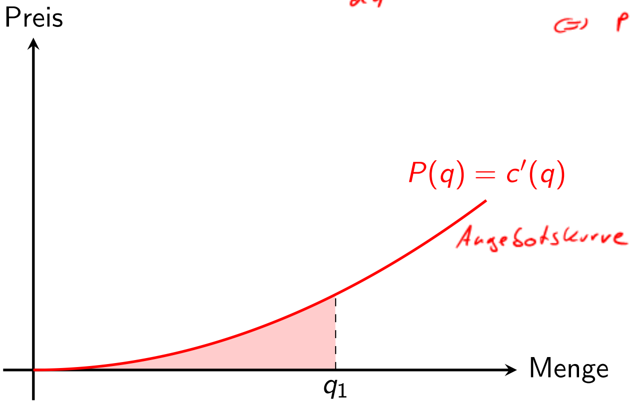
$$= \int_0^{q_0} P(q)\,dq - \boxed{p \cdot q_0}$$

Angebotskurve und Kosten

$\pi = p \cdot q - c(q)$

$\frac{d\pi}{dq} = p - c'(q) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow p = c'(q)$



Fläche unter der Angebotskurve:

$$\int_0^{q_1} c'(q)dq = c(q_1) - \underbrace{c(0)}_{\text{Fixkosten}}$$

Produzentenrente PR

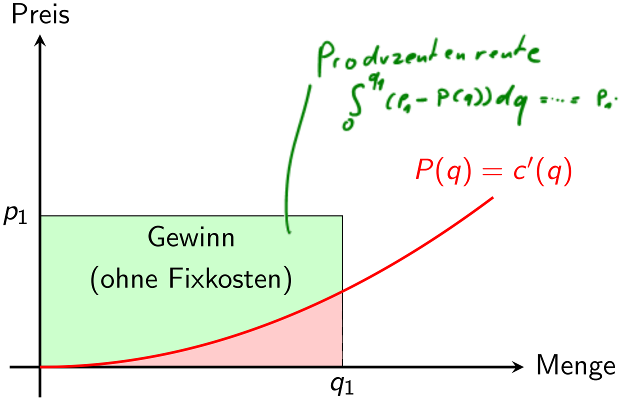
Die Firma biete q_1 Einheiten zum Preis p_1 an.

Erlös: $p_1 \cdot q_1$

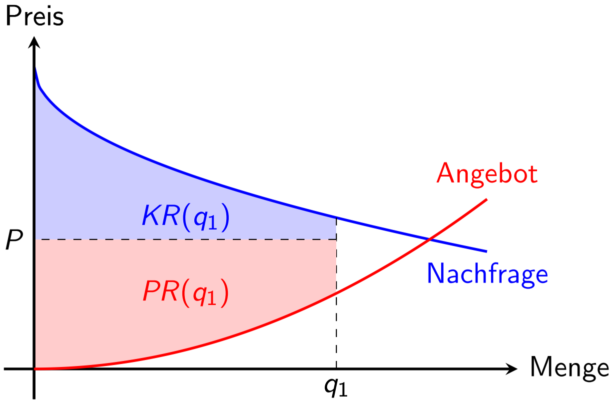
Gewinn: $\pi(q_1) = \underbrace{p_1 \cdot q_1}_{\text{Erlös}} - c(q_1)$ (ohne Fixkosten)

Produzentenrente

$$\int_0^{q_1} (p_1 - P(q))\,dq = \dots = p_1 \cdot q_1 - \int_0^{q_1} P(q)\,dq$$



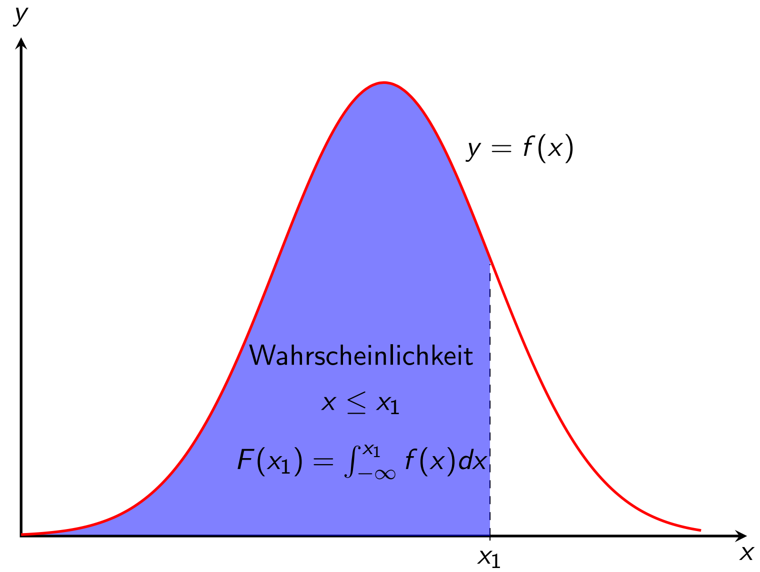
Wohlfahrt



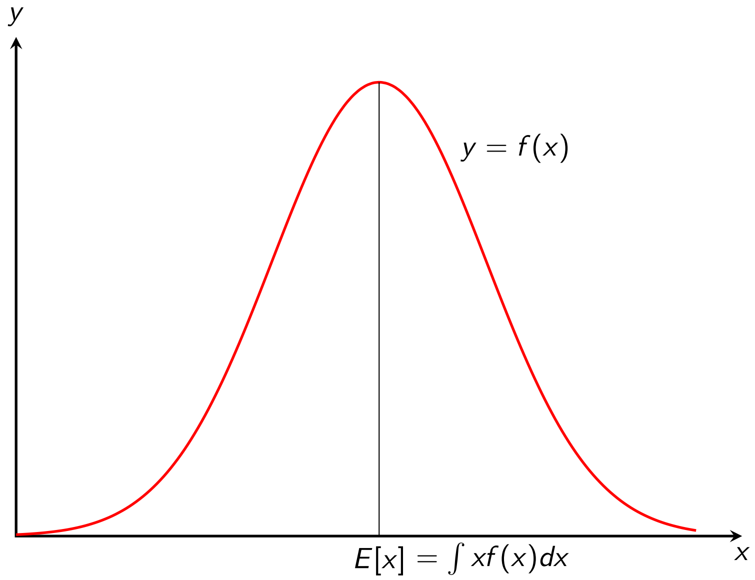
Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(q_1) = KR(q_1) + PR(q_1) = \int_0^{q_1} \left(P_D(q) - P_S(q)\right) dq$$

Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit



Erwartungswert



10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))'\,dx}_{f(x)g(x)} = \underbrace{\int f'(x)g(x)dx}_{\text{schwer}} + \underbrace{\int f(x)g'(x)dx}_{\text{leicht}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int f'(x)\,g(x)\,dx}_{\text{schwer}} = f(x)\,g(x) - \underbrace{\int f(x)\,g'(x)\,dx}_{\text{leicht}}$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

Beispiel

$$\int \underbrace{\overset{f}{x} \cdot \overset{g'}{e^x}} dx = \overset{f \cdot g}{x \cdot e^x} - \int \overset{f' \cdot g}{1 \cdot e^x} dx$$

Versuch 1: $x = f(x) \rightsquigarrow f'(x) = 1$

$e^x = g'(x) \rightsquigarrow g(x) = e^x$

Versuch 2: $x = f'(x) \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$e^x = g(x) \rightsquigarrow g'(x) = e^x$

$\int x e^x dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \underbrace{\int \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x dx}_{\text{Komplizierter}}$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx$$

$$= x \cdot e^x - (e^x + c)$$

$$= (x-1) \cdot e^x + C$$

Probe

$$\left((x-1) \cdot e^x + C\right)' = 1 \cdot e^x + (x-1) e^x = e^x + x e^x - e^x = \underline{\underline{x \cdot e^x}}$$

Zusammenfassung

- Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- Integrationsregeln
- Flächen und bestimmte Integrale
- Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- Ökonomische Anwendungen
- Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- Partielle Integration