

Vorlesung zu Kapitel 10:¹

Integration



Moodle



Lehrbuch

¹Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

10.1 Unbestimmte Integrale

10.2 Flächen und bestimmte Integrale

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

10.4 Ökonomische Anwendung

Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

10.5 Partielle Integration

Von welcher Funktion F ist eine gegebene Funktion f die Ableitung?

Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften:

- ▶ Maß für Handelsgewinne von Konsument:innen
- ▶ Maß für Kosten und Gewinne von Firmen
- ▶ Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ▶ ...

10.1 Unbestimmtes Integral, Stammfunktion

Seien f eine stetige und F eine differenzierbare Funktion.

Wenn f die Ableitung von F ist, so nennen wir F ein **unbestimmtes Integral** oder eine **Stammfunktion** von f und wir schreiben:

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

\int : **Integralzeichen**

$f(x)$: **Integrand**

x : **Integrationsvariable** (gekennzeichnet durch dx)

C : **Integrationskonstante**

Einige wichtige Integrale

Wenn $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq -1$, dann gilt:

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

Beispiele:

$$\int x dx =$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$\int \sqrt{x} dx =$$

Grundlegende Integrationsregeln

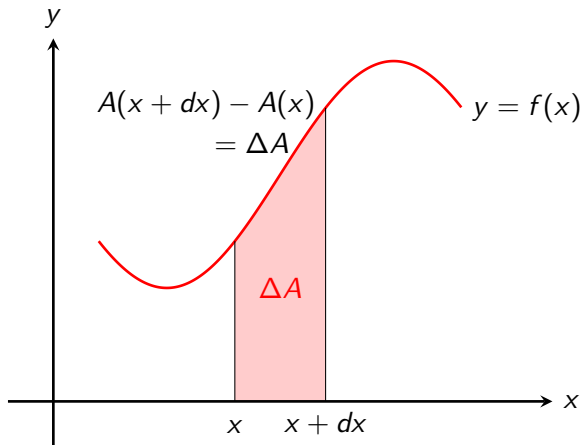
Wie bei Summen gilt:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \text{ wobei } a \text{ eine Konstante ist}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

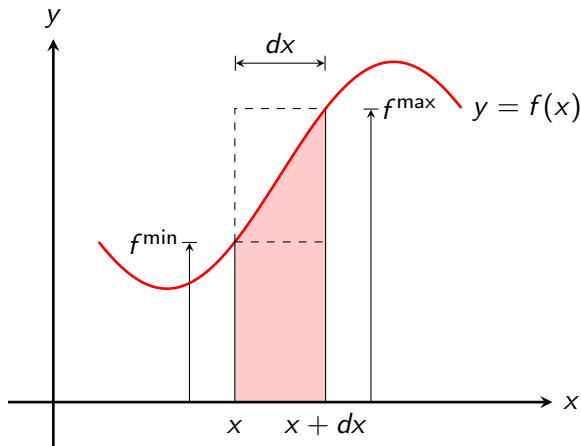
10.2 Flächen und bestimmte Integrale

ΔA : Fläche unter f (stetig, ≥ 0) auf dem Intervall $[x, x + dx]$



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

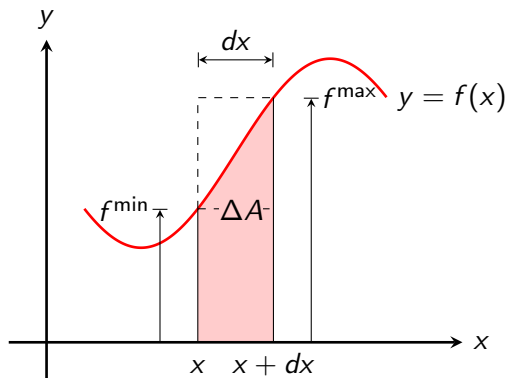
Die Fläche ΔA zwischen $[x, x + dx]$ ist **mindestens** so groß wie $dx \cdot f^{\min}$ und **höchstens** so groß wie $dx \cdot f^{\max}$:



10.2 Flächen und bestimmte Integrale

Es gilt also

$$f^{\min} \leq \frac{\Delta A}{dx} \leq f^{\max}$$



Fläche als unbestimmtes Integral

$$\begin{array}{ccccc} f^{\min} & \leq & \frac{\Delta A}{dx} & \leq & f^{\max} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ dx \rightarrow 0: & & & & \\ f(x) & \leq & A'(x) & \leq & f(x) \end{array}$$

Damit gilt $A'(x) = f(x)$ und:

$$A(x) = \int f(x) dx + C$$

Die Fläche A ist also ein unbestimmtes Integral der Funktion f .

Das bestimmte Integral

Sei f eine stetige Funktion und sei F die Stammfunktion von f .

Dann heißt die Differenz $F(b) - F(a)$ das **bestimmte Integral** von f über das Intervall $[a, b]$.

Das bestimmte Integral bezeichnen wir mit

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx = \left. F(x) \right|_a^b \text{ oder } [F(x)]_a^b$$

Die Zahlen a und b heißen **untere** bzw. **obere Integrationsgrenze**.

10.3 Eigenschaften bestimmter Integrale

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

▶ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

▶ $\int_a^a f(x) dx = 0$

▶ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ für $a < c < b$

▶ $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$

Differenzieren bezüglich der Integrationsgrenzen

Sei f eine stetige Funktion mit Stammfunktion F .

Dann gilt:

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x) dx = F'(b) = f(b) .$$

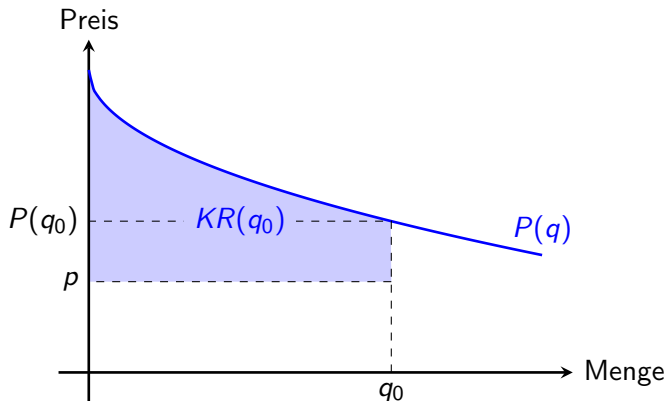
Ebenso gilt:

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(x) dx = -F'(a) = -f(a) .$$

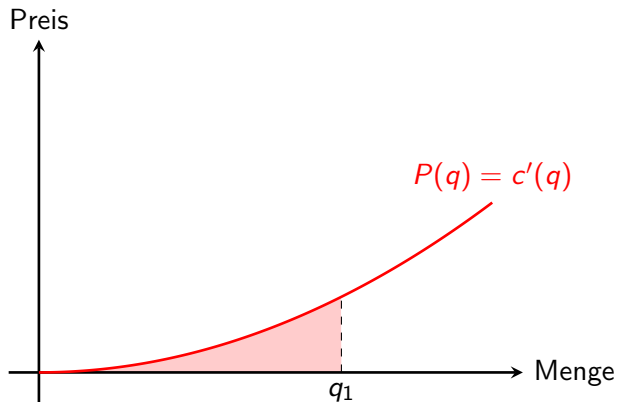
10.4 Ökonomische Anwendungen

- ▶ Konsumentenrente
- ▶ Kosten
- ▶ Produzentenrente
- ▶ Wahrscheinlichkeiten
- ▶ Erwartungswerte

Konsumentenrente KR



Angebotskurve und Kosten



Fläche unter der Angebotskurve:

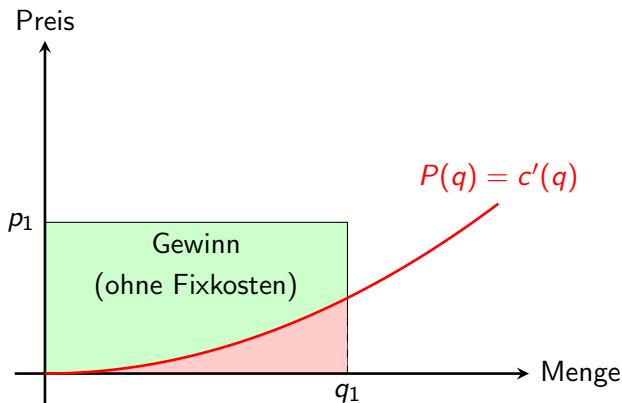
$$\int_0^{q_1} c'(q) dq = c(q_1) - c(0)$$

Produzentenrente PR

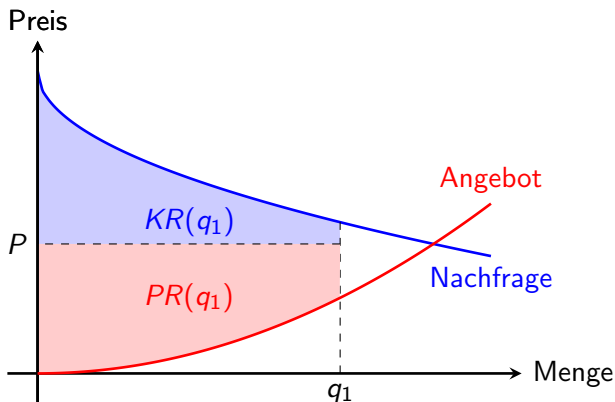
Die Firma biete q_1 Einheiten zum Preis p_1 an.

Erlös: $p_1 \cdot q_1$

Gewinn: $\pi(q_1) = p_1 \cdot q_1 - c(q_1)$



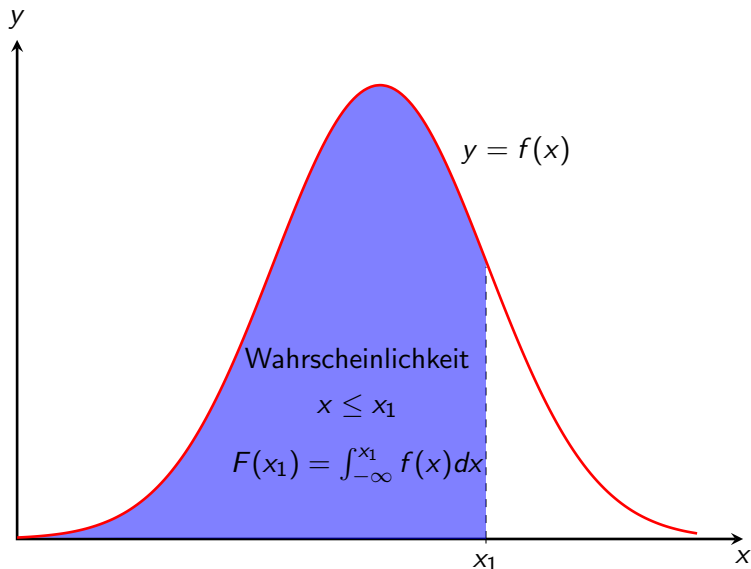
Wohlfahrt



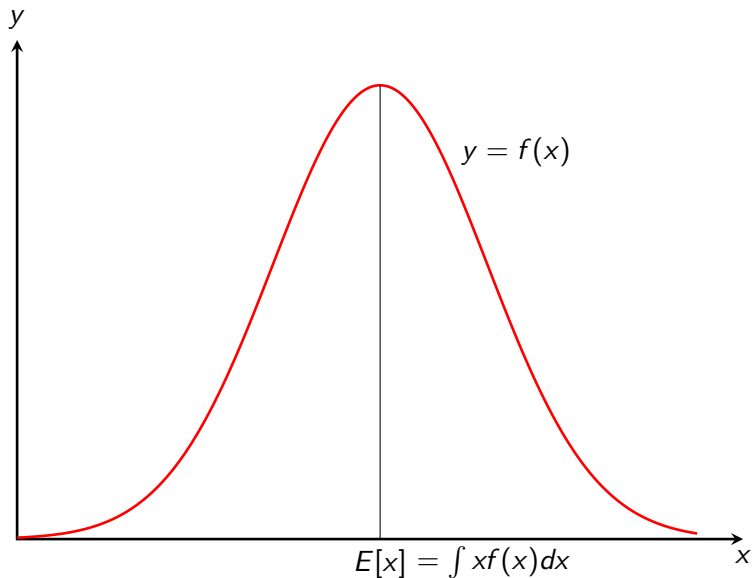
Die Wohlfahrt wird gemessen durch

$$W(q_1) = KR(q_1) + PR(q_1) = \int_0^{q_1} (P_D(q) - P_S(q)) dq$$

Dichtefunktion und Wahrscheinlichkeit



Erwartungswert



10.5 Partielle Integration

Zur Wiederholung aus Kapitel 6:

Produktregel:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Unbestimmtes Integral auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\underbrace{\int (f(x)g(x))' dx}_{f(x)g(x)} = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Formel der partiellen Integration:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx\right.$$

Wir benutzen die partielle Integration, wenn wir ein Produkt aus zwei Funktionen integrieren wollen, von denen die eine eine einfache Ableitung besitzt und die andere eine einfache Stammfunktion.

Zusammenfassung

- ▶ Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen: Notation
- ▶ Integrationsregeln
- ▶ Flächen und bestimmte Integrale
- ▶ Eigenschaften von bestimmten Integralen, Differenzierung
- ▶ Ökonomische Anwendungen
- ▶ Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte
- ▶ Partielle Integration