Übung 3 zu Kapitel 8:[1]

Konkave und konvexe Funktionen

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

Diese Aufgaben bearbeiten wir in dieser Übung:

8.2 Definitionen

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365
Beispiel 8.2.5 von Seite 364

8.3 Allgemeine Eigenschaften

Aufgabe 8.3.5 von Seite 370

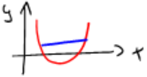
8.5 Tests der zweiten Ableitung

Beispiel 8.5.2 von Seite 376

8.6 Wendestellen

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382
Aufgabe 8.6.2 von Seite 382

Aufgabe 8.2.4 von Seite 365



Nehme an, dass ein Unternehmen Kosten für die Produktion von $Q \geq 0$ Einheiten ihres Produkts hat, gegeben durch die strikt konvexe Funktion c, wobei $c(0) = 0$.

Nehme auch an, dass das Unternehmen die Möglichkeit hat, einen zweiten Betrieb zu eröffnen mit derselben Kostenfunktion und dann einen Teil seiner Produktion in dem zweiten Betrieb herzustellen.

Sollte es das tun?

für alle λ : $0 < \lambda < 1$

$$c(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)Q) < \lambda \underbrace{c(0)}_{=0} + (1-\lambda)c(Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad c((1-\lambda)Q) < (1-\lambda)\,c(Q) \qquad (*)$$

$$c((1-\lambda)\cdot 0 + \lambda Q) < (1-\lambda)\underbrace{c(0)}_{=0} + \lambda\, c(Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad c(\lambda Q) < \lambda\, c(Q) \qquad (**)$$

$$c((1-\lambda)Q) < (1-\lambda)\, c(Q) \qquad (*)$$

$$c(\lambda \cdot Q) < \lambda\, c(Q) \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \; c((1-\lambda)Q) + c(\lambda Q) < (1-\lambda)c(Q) + \lambda\, c(Q) = c(Q)$$

für alle λ mit $0 < \lambda < 1$

$$(1-\lambda)Q = Q - \lambda Q$$

Welches λ ist am besten?

$$\min_{0<\lambda<1} \; c((1-\lambda)Q) + c(\lambda Q)$$

BEO $$\overbrace{c'((1-\lambda)Q)}^{\text{äußere}} \cdot \overbrace{(-Q)}^{\text{innere}} + c'(\lambda Q) \cdot Q \overset{!}{=} 0 \qquad |:Q$$

$$\Leftrightarrow \; -c'((1-\lambda)\cdot Q) + c'(\lambda Q) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \; c'(\lambda Q) \overset{!}{=} c'((1-\lambda)Q)$$

$$c'(\lambda Q) = c'((1-\lambda)Q)$$

- c strikt konvex

$\Rightarrow$ c' streng monoton steigend

$\Rightarrow$ Es gibt eine Umkehrfunktion von c'

$$\Rightarrow \quad (c')^{-1}\left(c'(\lambda Q)\right) = (c')^{-1}\left(c'((1-\lambda)Q)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda Q = (1-\lambda)Q \qquad | : Q$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 1-\lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

2. Ableitung von $c((1-\lambda)Q) + c(\lambda Q)$

1. Ableitung: $c'((1-\lambda)Q)\cdot(-Q) + c'(\lambda Q)\cdot Q$

$$\Rightarrow \quad c''((1-\lambda)Q)(-Q)(-Q) + c''(\lambda Q)\cdot Q\cdot Q$$

$$= \underbrace{c''((1-\lambda)Q)}_{>0}\cdot \underbrace{Q^2}_{>0} + \underbrace{c''(\lambda Q)}_{>0}\cdot \underbrace{Q^2}_{>0} > 0$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ ist eine strikte Minimumstelle.

Beispiel 8.2.5 von Seite 364

(i) x^2 streng konvex
→ siehe Vorlesung

Zeige, dass

i) $f(x) = \sqrt{x}$ strikt konkav auf dem Intervall $[0, \infty)$,

iii) $h(x) = ax + b$ konkav und konvex ist auf $\mathbb{R}$.

$$\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} > \lambda\sqrt{x_1} + (1-\lambda)\sqrt{x_2} \qquad \Big|\cdot\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}\cdot\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} > \left(\lambda\sqrt{x_1} + (1-\lambda)\sqrt{x_2}\right)\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}$$

$$> \big(\overset{a}{\lambda\sqrt{x_1}} + \overset{b}{(1-\lambda)\sqrt{x_2}}\big)\big(\overset{a}{\lambda\sqrt{x_1}} + \overset{b}{(1-\lambda)\sqrt{x_2}}\big)$$

$$\Leftrightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 > \overset{a^2}{\lambda^2 x_1} + \overbrace{2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}^{2ab} + (1-\lambda)^2 x_2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda - \lambda^2)}_{\lambda(1-\lambda)} x_1 - 2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \underbrace{\left((1-\lambda) - (1-\lambda)^2\right)}_{(1-\lambda)(1-(1-\lambda))} x_2 > 0 \qquad \Big| : (1-\lambda) \quad : \lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ (\sqrt{x_1})^2}}{x_1} - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + \underset{\substack{\Uparrow \\ (\sqrt{x_2})^2}}{x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x_1})^2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + (\sqrt{x_2})^2 > 0$$

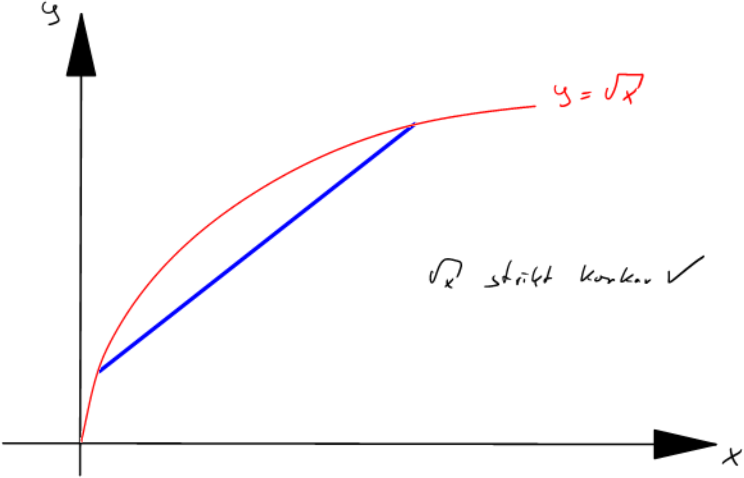
$$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 > 0 \quad \text{für alle } x_1 \neq x_2$$

Alternativ $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \underbrace{x^{-\frac{3}{2}}}_{>0} < 0 \quad \text{falls } x > 0$$

$\Rightarrow$ f strikt konkav auf $(0, \infty)$

Problem: f' & f'' sind für $x=0$ nicht definiert



$\sqrt{x}$ strikt konkav ✓

$h(x) = a \cdot x + b$

$$\underline{h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)} = a(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + b$$

$$= a\lambda x_1 + a(1-\lambda)x_2 + b$$

$$= \lambda a x_1 + (1-\lambda)a x_2 + \lambda b + (1-\lambda)b$$

$$= \lambda a x_1 + \lambda b + (1-\lambda)a x_2 + (1-\lambda)b$$

$$= \lambda(a x_1 + b) + (1-\lambda)(a x_2 + b)$$

$$= \underline{\lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)}$$

Es gilt $h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)$ (konkav)

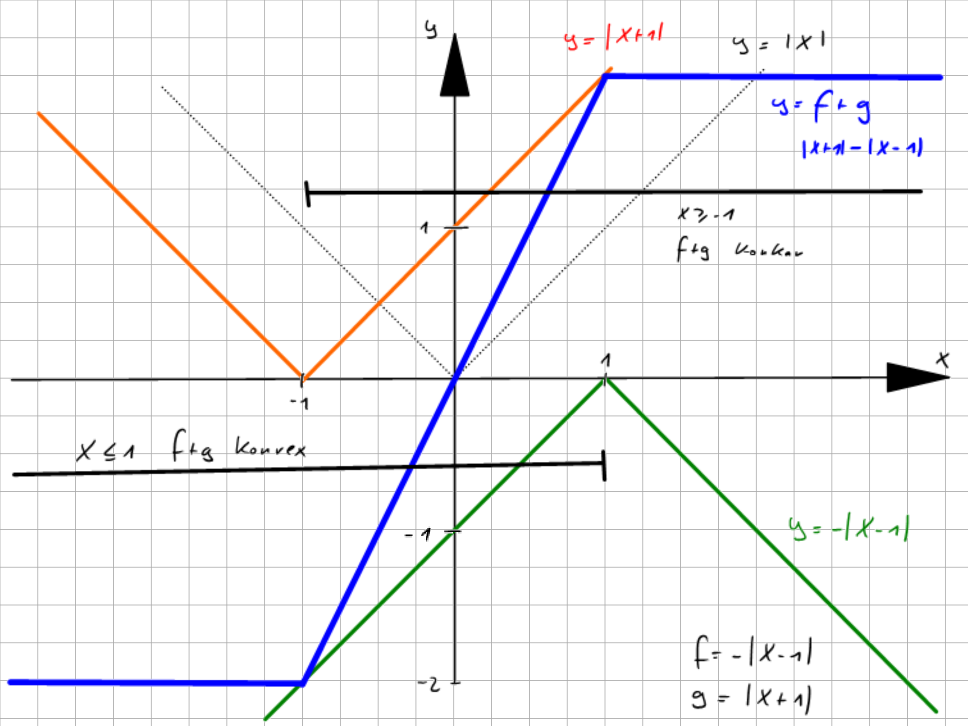
und $h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)$ (konvex)

Aufgabe 8.3.5 von Seite 370

Betrachte die zwei Funktionen $f(x) = -|x-1|$ und $g(x) = |x+1|$, beide definiert auf $(-\infty, \infty)$.

a) Zeige, dass f konkav ist und dass g konvex ist auf $(-\infty, \infty)$.

b) Für welche Werte von a und b ist die auf dem Intervall (a, b) definierte Funktion $f + g$ (i) konkav; (ii) konvex; (iii) sowohl konkav als auch konvex; (iv) weder konkav noch konvex?



y
x
$y = |x+1|$
$y = |x|$
$y = f+g$
$|x+1| - |x-1|$
$x \geq -1$
$f+g$ konkav
$x \leq 1$ $f+g$ konvex
$y = -|x-1|$
$f = -|x-1|$
$g = |x+1|$
1
-1
1
-1
-2

$g = |x+1|$ konvex:

$$= \begin{cases} x+1 & \text{falls } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{falls } x+1 < 0 \end{cases}$$

$$= \max\{x+1, -(x+1)\}$$

$x+1$, $-x-1$ lineare Funktionen $\Rightarrow$ (auch) konvex

Das Maximum von konvexen Fkten ist konvex.

$$f = -|x-1|$$

$$= \begin{cases} -(x-1) & \text{falls } x-1 \geq 0 \\ x-1 & \text{falls } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \min\{-(x-1),\ x-1\}$$

$-x+1$, $x-1$ Lineare Fkt $\Rightarrow$ (auch) konkav

Das Minimum von konkaven Fkten ist konkav.

Beispiel 8.5.2 von Seite 376

Untersuche die Konkavität / Konvexität der Produktionsfunktion
$Y = AK^a$, definiert für alle $K \geq 0$, wobei $A > 0$ und $a > 0$.

$$Y' = \underbrace{A}_{>0}\underbrace{a}_{>0}\underbrace{K^{a-1}}_{>0} \quad \text{falls } K > 0$$

positives Grenzprodukt für $K > 0$

$$Y'' = \underbrace{A}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} \cdot (a-1)\underbrace{K^{a-2}}_{>0} \quad \text{falls } K > 0 \quad \begin{cases} < 0 & \text{falls } a < 1 \\ = 0 & \text{falls } a = 1 \\ > 0 & \text{falls } a > 1 \end{cases}$$

streng konkav

streng konvex

Aufgabe 8.6.1 von Seite 382

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Sei f für alle x definiert durch

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$$

Bestimme die Stellen c, an denen $f'(c) = 0$ und bestimme die Intervalle, in denen f monoton wachsend ist.

$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2} 2x - 6 = 3x^2 + 3x - 6$

$f''(x) = 6x + 3$

BEO: $3x^2 + 3x - 6 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \overset{p=1}{x} \overset{q=-2}{-2} = 0$

$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

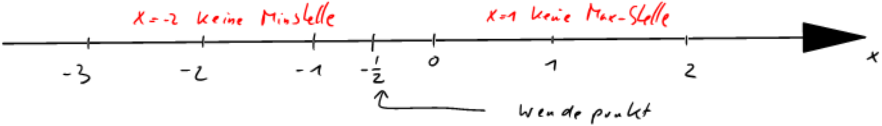
$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$$

$$f'(0) = 3\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f'(2) = 3\cdot 4 + 3\cdot 2 - 6 = 12 + 6 - 6 = 12 > 0$$

$$f'(-3) = 3\cdot 9 + 3\cdot(-3) - 6 = 27 - 9 - 6 = 12 > 0$$



f' — > 0 —| 0 |— < 0 —| 0 |— > 0 —

$$f''(x) = 6x + 3 > 0 \iff 2x+1 > 0 \iff 2x > -1 \iff x > -\tfrac{1}{2}$$

Aufgabe 8.6.2 von Seite 382

Entscheide, wo die folgende Funktion konvex ist und bestimme mögliche Wendestellen:

$$h(x) = xe^x$$

$$h'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)e^x$$

$$h''(x) = e^x + e^x + xe^x = (2 + x)\underbrace{e^x}_{>0} \begin{cases} > 0 & \text{falls } x > -2 \\ = 0 & \text{falls } x = -2 \\ < 0 & \text{falls } x < -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -2$ Wendestelle

h ist streng konvex $(-2, \infty)$