Vorlesung zu Kapitel 09:[1]

Optimierung

Moodle

Lehrbuch

[1] Aus „Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler“ von Sydsæter, Hammond, Strøm und Carvajal, 6. Auflage

9.1 Extremstellen

Sei f eine Funktion. Dann ist

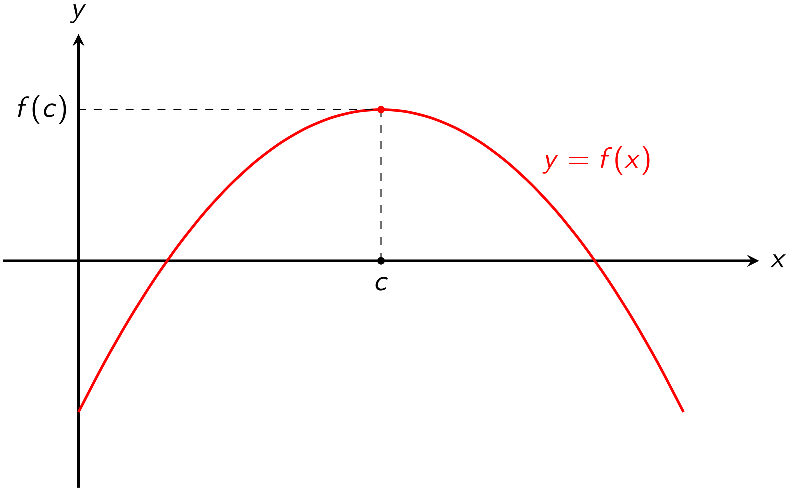
- c eine **Maximalstelle** für f und $f(c)$ ist der **Maximumwert**, wenn
$$f(x) \leq f(c) \text{ für alle } x$$

- d eine **Minimalstelle** für f und $f(d)$ ist der **Minimumwert**, wenn
$$f(x) \geq f(d) \text{ für alle } x$$

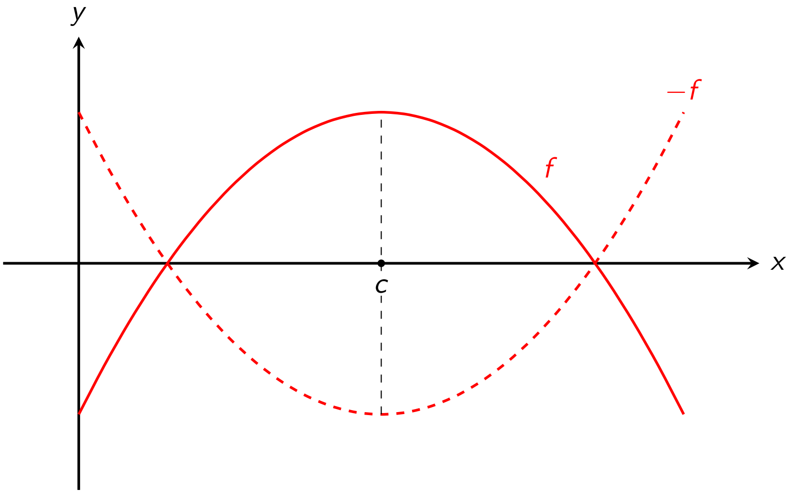
Sind die Ungleichungen strikt für alle $x \neq c$ bzw. $x \neq d$, so heißen c und d strikte Maximal- und Minimalstelle.

Die kollektive Bezeichnung lautet **Extremstelle**.

Maximalstelle c, Maximalwert $f(c)$



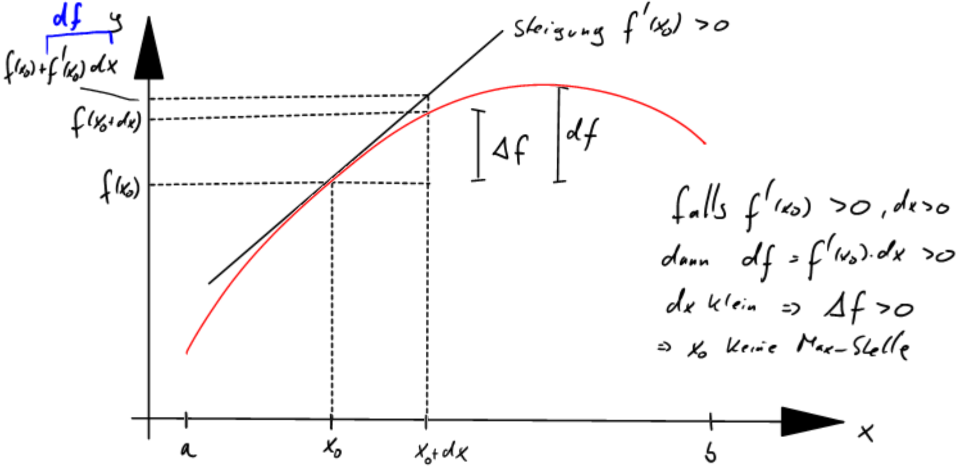
Maximum von f = Minimum von $-f$



Bedingungen für innere Extrempunkte

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$.

Behauptung: x_0 kann **keine** Maximumstelle von f sein!



x_0 innerer Punkt

$$f'(x_0) \neq 0 \begin{cases} f'(x_0) > 0 & \Rightarrow \quad x_0 \text{ keine Max-Stelle} \\ f'(x_0) < 0 & \Rightarrow \quad x_0 \text{ keine Max-Stelle} \end{cases}$$

Kontraposition

hinreichende Bedingung notwendige Bedingung

x_0 eine Max-Stelle $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

„Bedingung 1. Ordnung"

BEO FOC (engl.)

Notwendige Bedingung erster Ordnung

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Falls $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (a, b)$:

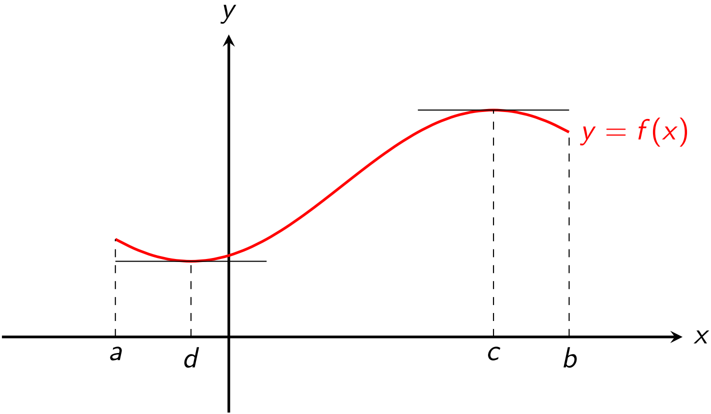
- x_0 kann keine Maximumstelle von f sein.
- x_0 kann keine Minimumstelle von f sein. (Begründung analog)

Damit $x_0 \in (a, b)$ eine Extremstelle für f in (a, b) ist, ist es eine **notwendige Bedingung**, dass die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 gleich null ist:

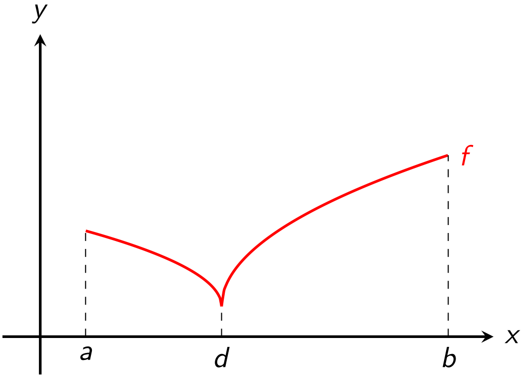
$$f'(x_0) = 0 \ .$$

Wir nennen Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ auch **stationäre** oder **kritische** Stellen.

Zwei stationäre Stellen

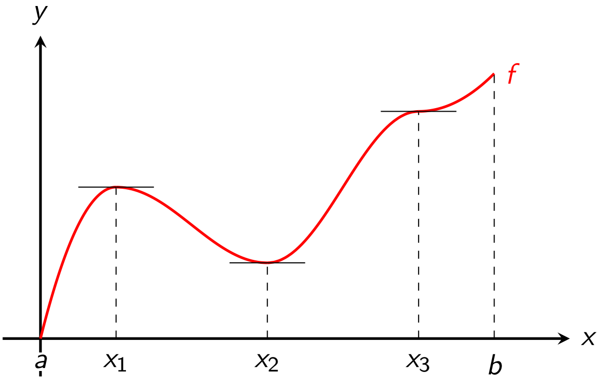


Keine stationäre Stelle



$f'(x)$ ist für $x = d$ nicht definiert.

Keine inneren Extrema



Wenn x stationär ist, können wir nicht schlussfolgern, dass x eine Extremstelle von f ist!

Beispiel 9.2.2 Definitionsbereich $[0,\infty)$ S. 391

Die Konzentration eines Arzneimittels im Blut, gemessen in Milligramm pro Liter, ist t Stunden nach der Injektion gegeben durch die Formel $c(t) = t/(t^2+4)$ für $t \geq 0$. Finden Sie den Zeitpunkt und die Höhe der maximalen Konzentration.

Bestimme $c'(t)$

$$c(t) = \frac{t}{t^2+4} \quad t = f(t), \quad t^2+4 = g(t)$$

$$c'(t) = \frac{1\cdot(t^2+4) - t\cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2+4-2t^2}{(t^2+4)^2} = \frac{4-t^2}{\underbrace{(t^2+4)^2}_{>0}} = 0 \Leftrightarrow 4-t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 = t^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{t = -2} \text{ oder } t = 2$$

eine eindeutige innere stationäre Stelle: $t=2$

hier:

$$f'(t) = 1$$

$$g'(t) = 2t$$

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)\cdot g(t) - f(t)\cdot g'(t)}{g(t)^2}$$

Ist $t=2$ eine Maximumstelle?

Da, falls $c'(t) > 0$ für $t < 2$ und $c'(t) < 0$ für $t > 2$

$$c'(t) = \frac{4-t^2}{\underbrace{(t^2+4)^2}_{>0}} > 0 \iff 4-t^2 > 0 \iff 4 > t^2$$

$$\iff -2 < t < 2 \qquad \Rightarrow c'(t) > 0 \text{ für alle } t: 0 \leq t < 2$$

$$\ldots \qquad c'(t) < 0 \text{ für alle } t > 2$$

$\Rightarrow$ $t=2$ Max-Stelle

Hat $c(t)$ eine Minimumstelle?

Kein $t > 0$ kann eine Minimumstelle sein!

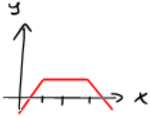
Ist $t = 0$ eine Min-Stelle? ✓

$$c(0) = \frac{0}{0^2+4} = 0 < \underbrace{\frac{t}{t^2+4}}_{c(t)} \quad \text{für alle } t > 0$$

9.2 Einfache Tests auf eine Maximum-/Minimumstelle

$f'(x_0) = 0$

Sei x_0 eine stationäre Stelle für f.



(i) Wenn f konkav ist, dann ist x_0 eine Maximumstelle für f.

(ii) Wenn f strikt konkav ist, dann ist eine Maximumstelle für f eindeutig.

(iii) Wenn f konvex ist, dann ist x_0 eine Minimumstelle für f.

(iv) Wenn f strikt konvex ist, dann ist eine Minimumstelle für f eindeutig.

Bedingung 2. Ordnung

Sei f zweimal differenzierbar und sei x_0 eine stationäre Stelle.

- Falls $f''(x) \leq 0$ für alle x, dann ist x_0 eine Maximumstelle.
  $\Rightarrow f$ konkav
- Falls $f''(x) < 0$ für alle x,
  $\Rightarrow f$ strikt konkav
  dann ist x_0 die einzige Maximumstelle.
- Falls $f''(x) \geq 0$ für alle x, dann ist x_0 eine Minimumstelle.
- Falls $f''(x) > 0$ für alle x,
  dann ist x_0 die einzige Minimumstelle.

Falls x_0 eine Max-Stelle ist $\Rightarrow$ $f''(x_0) \leq 0$

Falls $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 keine Max-Stelle.

9.4 Der Extremwertsatz

Es sei angenommen, dass f eine **stetige** Funktion auf einem **abgeschlossenen** und **beschränkten** Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist.

↳ Randpunkte sind enthalten ↳ ∞ oder $-\infty$ dürfen keine Intervallgrenze sein.

Dann existiert eine Stelle $d \in [a, b]$, an der f ein Minimum hat und eine Stelle $c \in [a, b]$, an der f ein Maximum hat, d.h. es gilt:

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \; \forall \, x \in [a, b]$$

Sind stetig, abgeschlossen oder beschränkt nicht erfüllt, können Extremstellen existieren, müssen es aber nicht.

Warum gibt es hier kein Maximum?

$0 < x \leq 1$

beschränkt ✓

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + 10}_{\text{stetig ✓ für } 0<x\leq 1} = x^{-1} + 10$$

halboffen

$\Rightarrow$ abgeschlossen verletzt!

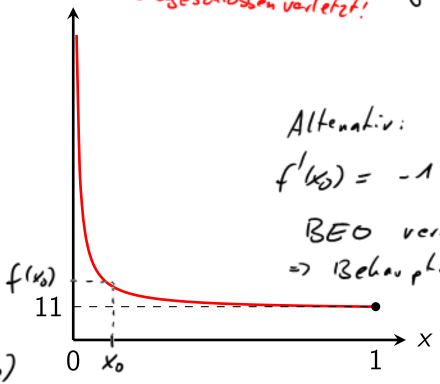
Behauptung:

x_0 für $0 < x_0 \leq 1$ ist eine Max-Stelle.

Aber $x_1 = \frac{x_0}{2} > 0$

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + 10 = \frac{1}{x_0/2} + 10 = \frac{2}{x_0} + 10 > \frac{1}{x_0} + 10 = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ Behauptung ist falsch



Alternativ:

$$f'(x_0) = -1 \cdot x_0^{-2} = -\frac{1}{x_0^2} < 0$$

BEO verletzt

$\Rightarrow$ Behauptung falsch

Warum gibt es hier kein Maximum?

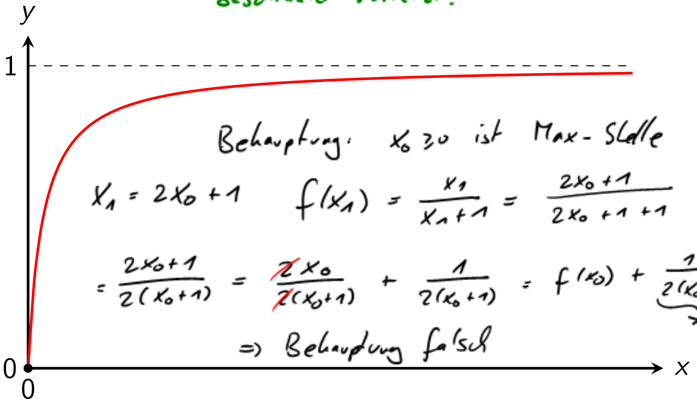
$\frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow x < x+1$ ✓

$x \geq 0$

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{x}{x+1}$$

stetig ✓

beschränkt verletzt!



Behauptung: $x_0 \geq 0$ ist Max-Stelle

$x_1 = 2x_0 + 1 \qquad f(x_1) = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{2x_0+1}{2x_0+1+1} = \frac{2x_0+1}{2x_0+2}$

$= \frac{2x_0+1}{2(x_0+1)} = \frac{\cancel{2}x_0}{\cancel{2}(x_0+1)} + \frac{1}{2(x_0+1)} = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2(x_0+1)}}_{>0} > f(x_0)$

$\Rightarrow$ Behauptung falsch

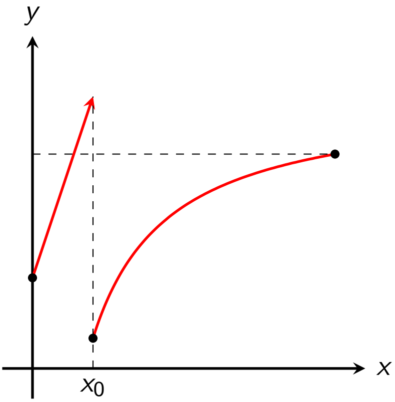
Alternativ:

$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

BEO verletzt

$x_0 > 0$ keine Max-Stelle

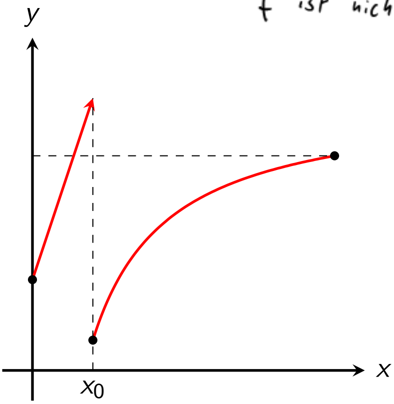
Warum gibt es hier kein Maximum?



Warum gibt es hier kein Maximum?

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

f ist nicht stetig!



Wie nach Extremstellen gesucht wird

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, wobei der Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

Jede Extremstelle des Intervalls D gehört zu einer der drei verschiedenen Mengen:

(a) Innere Punkte von D, in denen $f'(x) = 0$ ist;

(b) Endpunkte von D, falls sie zu D gehören; und

(c) Innere Punkte von D, in denen f' nicht existiert.

Punkte, die zu (a), (b) oder (c) gehören, heißen **Kandidaten für Extremstellen**.

Auffinden der Extrema von differenzierbaren Funktionen

beschränkt
& abgeschlossen

auch stetig
$\Uparrow$

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

Um die Extremwerte von f zu finden, gehe wie folgt vor:

1. Bestimme alle stationären Stellen von f in (a, b), d.h. bestimme alle $x \in (a, b)$, die die Gleichung $f'(x) = 0$ erfüllen.

2. Berechne den Funktionswert von f in den Endpunkten a und b des Intervalls und auch an allen stationären Stellen.

3. Der größte der in 1. und 2. gefundenen Funktionswerte ist der Maximalwert und der kleinste Funktionswert ist der Minimalwert von f in $[a, b]$.

$f : [0,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$0 \leq x \leq 3$

$f''(x) = 6 > 0$ für alle x

$\Rightarrow x=1$ eindeutige Min-Stelle

1. $f'(x) = 6x - 6 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

   eindeutige innere stationäre Stelle: $x=1$

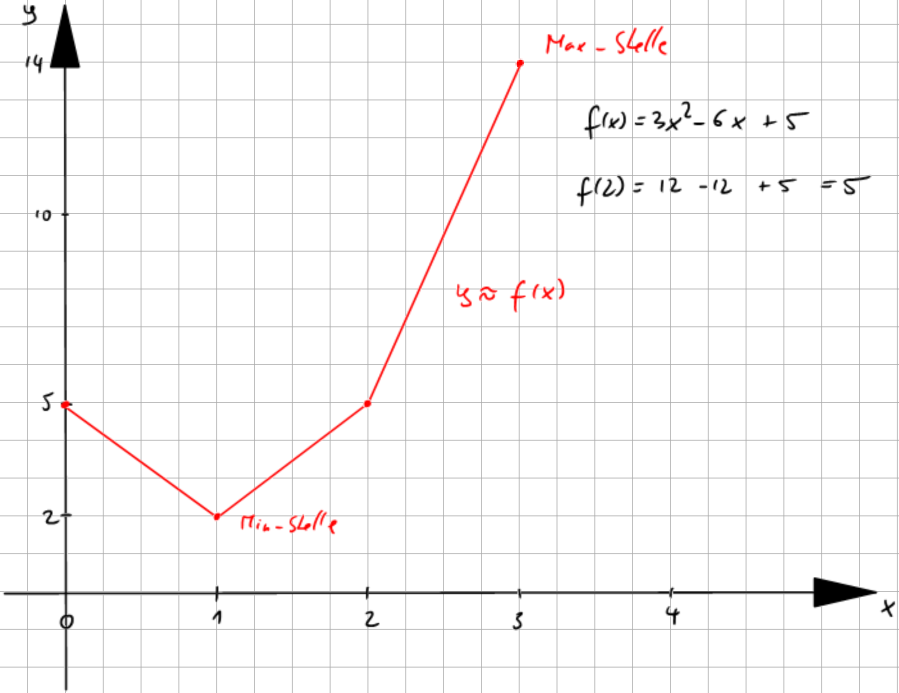
2. $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

   $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 3 - 6 + 5 = 2$

   $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 27 - 18 + 5 = 14$

3. $x=3$: Max-Stelle

   $x=1$: Min-Stelle



$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f(2) = 12 - 12 + 5 = 5$

Zusammenfassung

- Extremstellen: Maximal- & Minimalstellen
- Notwendige Bedingung erster Ordnung für innere Extremstellen
- Bedingung zweiter Ordnung für Extremstellen
- Extremwertsatz