

### Aufgabenblatt 3 Ökonometrie MSc im Sommersemester

#### Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -7 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (falls möglich):

- $A + B$  und  $A - B$
- $A' + B$  und  $A + B'$
- $AB$  und  $BA$
- $A'B$  (und  $AB'$ )

#### Aufgabe 2

Betrachte für  $X \in \mathbb{R}^{n \times (K+1)}$  mit  $rk(X) = K + 1$  die Matrix

$$P_X = X(X'X)^{-1}X'$$

- a) Zeigen Sie, dass  $P_X$  eine *Projektionsmatrix* ist, d.h. verifizieren Sie
  - i)  $P_X' = P_X$  und
  - ii)  $P_X P_X = P_X$ .
- b) Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *positiv semidefinit*, falls für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $x'Ax \geq 0$ . Zeige, dass  $P_X$  positiv semidefinit ist.
- c) Sei  $Z = X\Gamma$  für eine beliebige Matrix  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(K+1) \times m}$ . Zeige, dass  $P_X Z = Z$  gilt.
- d) Zeige für den Spezialfall  $X = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , dass die Matrix  $P_X$  gegeben ist durch

$$P_X = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimme  $P_X y$  für einen beliebigen Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$ .

#### Aufgabe 3

Betrachte für  $X \in \mathbb{R}^{n \times (K+1)}$  mit  $rk(X) = K + 1$  die Matrix

$$M_X = I - P_X,$$

wobei  $I$  die  $(n \times n)$  die Einheitsmatrix bezeichnet.

- a) Zeige, dass  $M_X$  eine Projektionsmatrix ist.
- b) Zeige, dass  $M_X$  positiv semidefinit ist.
- c) Zeige, dass  $M_X X = N$  und  $M_X P_X = P_X M_X = N$ .