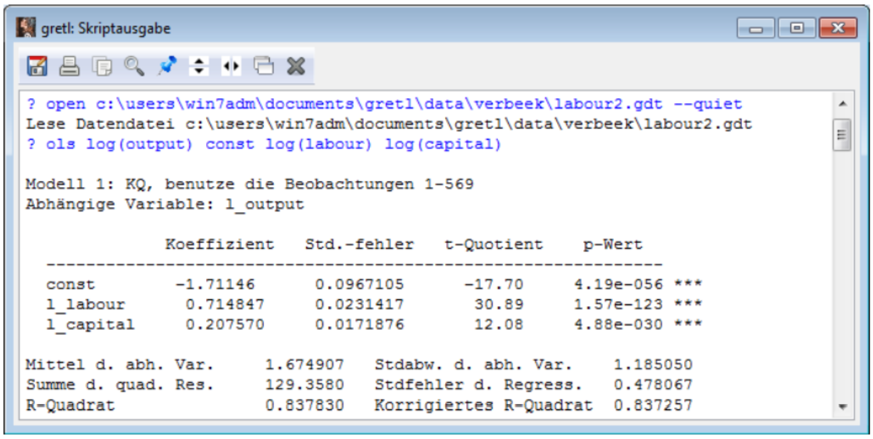
Übung zur Vorlesung Ökonometrie
Masterstudiengang
Sommersemester 2025

Aufgabenblatt 3

1. Sie haben Unternehmensdaten über Produktionsmenge q_i, Arbeitseinsatz n_i und Kapitalstock k_i von 569 Firmen. Sie wollen eine Produktionsfunktion der Cobb-Douglas - Form $q_i = n_i^{\alpha} k_i^{1-\alpha} e_i$ schätzen, wobei e_i ein Zufallsfehler ist. Sie schätzen die folgende Spezifikation:




```
? open c:\users\win7adm\documents\gretl\data\verbeek\labour2.gdt --quiet
Lese Datendatei c:\users\win7adm\documents\gretl\data\verbeek\labour2.gdt
? ols log(output) const log(labour) log(capital)

Modell 1: KQ, benutze die Beobachtungen 1-569
Abhängige Variable: l_output

             Koeffizient   Std.-fehler   t-Quotient    p-Wert
  ------------------------------------------------------------
  const       -1.71146      0.0967105     -17.70      4.19e-056 ***
  l_labour     0.714847     0.0231417      30.89      1.57e-123 ***
  l_capital    0.207570     0.0171876      12.08      4.88e-030 ***

Mittel d. abh. Var.      1.674907   Stdabw. d. abh. Var.    1.185050
Summe d. quad. Res.      129.3580   Stdfehler d. Regress.   0.478067
R-Quadrat                0.837830   Korrigiertes R-Quadrat  0.837257
```

   (a) Sind diese Ergebnisse kompatibel mit Ihrer Hypothese, dass sich die Exponenten von Arbeit und Kapital zu eins addieren (konstante Skalenerträge)? Formulieren Sie die Nullhypothese, mit der Sie aus obiger Spezifikation in der Notation der Vorlesung in der Form $R\beta = r$ die Hypothese testen können.

   (b) Führen Sie den Test durch (Hinweis: verwenden Sie $R(X'X)^{-1}R' = 0.0012952$). Wie entscheiden Sie?

   (c) Nehmen Sie an, Sie wollten (trotz des Testergebnisses) die Schätzung restringieren, so dass die Exponenten von Arbeit und Kapital sich exakt zu eins addieren müssen. Geben Sie eine Spezifikation für diese restringierte Schätzung an.

   (d) Wie wird sich der R^2 der restringierten Schätzung von demjenigen aus dem obigen `gretl` - Output unterscheiden?

2. Sie schätzen ein logarithmisch-lineares Modell für die variablen Produktionskosten c_t eines Unternehmens in Abhängigkeit von als exogen unterstellten Stundenlohnsätzen w_t und Materialkostensätzen m_t und der Produktionsmenge q_t (alle Variablen als natürliche Logarithmen gemessen) mit OLS. Ihr Schätzergebnis aus einer Stichprobe mit 204 Beobachtungswerten lautet $\widehat{c_t} = 0.62 + 0.4w_t + 0.5m_t + 1.1q_t$ mit einem R^2 von 0.8. In Ihrer Stichprobe ist $\sum_{t=1}^{204}(c_t - \bar{c})^2 = 250$, mit $\bar{c}$ als Stichprobenmittelwert. Sie wollen testen, ob die Kostenfunktion homogen in den Faktorpreisen ist (d.h. ob sich die Parameter der Lohn- und Materialkosten zu eins addieren), und gleichzeitig wollen Sie testen, ob die Stückkosten unabhängig von der Produktionsmenge sind (d.h. ob der Parameter der Produktionsmenge auf eins restringiert werden kann).

(a) Formulieren Sie die (gemeinsame) Null- und Alternativhypothese.

(b) Berechnen Sie den Wert der Teststatistik [Hinweis: wenn X die Matrix der Regressorvariablen ist, spaltenweise angeordnet in der Reihenfolge der Variablen in der oben angegebenen Regressionsgleichung, dann ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 8 \\ 6 & 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}$].

(c) Wie ist die Teststatistik unter der Nullhypothese verteilt, wenn die Störterme des Modells normalverteilt sind (ggf. mit Angabe der Parameter der relevanten Verteilung)?

(d) Nehmen Sie an, der Test liefere einen p - Wert von 0.9441. Geben Sie an, wie die genaue Interpretation dieses Ergebnisses lautet. Entscheiden Sie dann den Test auf einem konventionell verwendeten Signifikanzniveau.

3. Sie erhalten folgendes Schätzergebnis für das klassische Regressionsmodell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + u_i$ mit normalverteiltem Störterm:

OLS, benutze die Beobachtungen 1-86			
Abhängige Variable: y_i			
	$const.$	x_{i1}	x_{i2}
Koeffizient	3	2	-0.5
Standardfehler	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{12}$
$SSR = 83$			

Wenn X die Matrix der Regressorvariablen bezeichnet, dann ist $(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & 12 \end{pmatrix}$.

(a) Ermitteln Sie die F - Statistik zum Test der Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 1$ und $\beta_2 = -1$.

(b) Der p - Wert zum Test der vorigen Unteraufgabe ist $p = 0.7634$. Erläutern Sie, welche Schlussfolgerung Sie aus dieser Information für die Testentscheidung ziehen können.

4. Sie schätzen die folgenden zwei Regressionen:

$$\begin{aligned} \widehat{y_i} &= 5 + 0.2x_i, \quad n = 240, R^2 = 0.23 \\ \widehat{y_i} &= 6 + 0.3x_i + 2.8z_i, \quad n = 240, R^2 = 0.31 \end{aligned}$$

Wie hoch ist der Standardfehler des geschätzten Koeffizienten von z_i (runden Sie auf zwei Nachkommastellen)?

5. Sie wollen den Einfluss von Serviceaufwendungen (Variable x) auf die Kundenzufriedenheit (Variable y) mit einem klassischen Regressionsmodell schätzen. Sie haben je 100 Beobachtungsdaten für beide Variablen aus Nordrhein-Westfalen und aus Hessen. Seien $\mathbf{y}^N$ und $\mathbf{x}^N$ die Spaltenvektoren mit den Beobachtungen aus Nordrhein-Westfalen, und

$\mathbf{y}^H$ und $\mathbf{x}^H$ die entsprechenden Spaltenvektoren mit den Beobachtungen aus Hessen. Sei ferner $\mathbf{1}$ ein (100×1) - Vektor aus Einsen, und $\mathbf{0}$ ein (100×1) - Vektor aus Nullen. Sie schätzen die Modelle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^N \\ \mathbf{y}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x}^N \\ \mathbf{1} & \mathbf{x}^H \end{pmatrix} \beta + \mathbf{u}_1$$

(mit β einem (2×1) - Parametervektor und $\mathbf{u}_1$ einem Störterm) sowie

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^N \\ \mathbf{y}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x}^N & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{x}^H \end{pmatrix} \gamma + \mathbf{u}_2$$

(mit γ einem (3×1) - Parametervektor und $\mathbf{u}_2$ einem Störterm). Aus der OLS - Schätzung des ersten Modells erhalten Sie $\widehat{\beta} = (2.08, 0.39)'$ und $R^2 = 0.1382$, und aus der OLS - Schätzung des zweiten Modells erhalten Sie $\widehat{\gamma} = (2.08, 0.34, 0.45)'$ und $R^2 = 0.1411$.

(a) Sie wollen die Hypothese testen, dass der Einfluss der Serviceaufwendungen auf die Kundenzufriedenheit in beiden Bundesländern derselbe ist. Formulieren Sie die Null- und die Alternativhypothese.

(b) Ermitteln Sie den Wert einer geeigneten Teststatistik zum Test der genannten Nullhypothese.

(c) Ihr Regressionsprogramm gibt zu dem Test einen p - Wert von 0.4171 aus. Erläutern Sie möglichst präzise den Aussagegehalt dieser Information, und geben Sie an, wie Sie diese für die Testentscheidung verwenden würden.

6. Sie untersuchen ein Regressionsmodell $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$, das allen klassischen Annahmen genügt, mit $n = 82$ Beobachtungswerten und erhalten die OLS - Schätzungen $\widehat{\beta}_0 = 1$, $\widehat{\beta}_1 = 2$, sowie als Summe der quadrierten Residuen den Wert 100. Sodann definieren Sie die neue Variable $v_i = y_i - x_i$ und schätzen eine weitere OLS - Regression $v_i = \alpha_0 + e_i$ mit α_0 einer Konstanten und e_i einem Störterm. Hieraus erhalten Sie als Summe der quadrierten Residuen einen Wert von 120. Darüber hinaus sei die Summe der quadratischen Abweichungen von y_i (Also $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$) gegeben als 120.

   (a) Wie hoch ist der Wert der F - Teststatistik zum Test von $H_0 : \beta_1 = 1$ gegen $H_1 : \beta_1 \neq 1$?

   (b) Wie hoch ist der Standardfehler von $\widehat{\beta}_1$?

   (c) Wie hoch ist jeweils der R^2 der beiden oben genannten Regressionen?